

УДК 532.6

*А. Г. Калугин, Д. В. Павлов*

## О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ В СЛОЕ НЕМАТИЧЕСКОГО ЖИДКОГО КРИСТАЛЛА

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,  
механико-математический факультет,  
Ленинские горы, д. 1, 119991 Москва, Россия. E-mail: kalugin@mech.math.msu.su

*В работе рассматривается задача о равновесии планарно ориентированного плоского слоя нематического жидкого кристалла. Показано, что учет дивергентных слагаемых в свободной энергии упругости ориентации Франка позволяет получить нетривиальные периодические решения для возмущений директора с волновым вектором, перпендикулярным невозмущенной планарной ориентации директора. Получены соотношения, связывающие величину коэффициента при дивергентных слагаемых с волновым числом, толщиной слоя и другими параметрами среды, на основании которых и известных экспериментальных данных дана оценка дивергентной константы Франка.*

**Ключевые слова:** дивергентная константа, нематические жидкие кристаллы, граничные условия.

**DOI:** 10.18083/LCAppl.2017.2.62

*A. G. Kalugin, D. V. Pavlov*

## ON PERIODICAL SOLUTIONS IN NEMATIC LIQUID CRYSTAL LAYER

Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics,  
1 Leninskiye Gory, Moscow, 119991, Russia. E-mail: kalugin@mech.math.msu.su

*The problem of equilibrium of a planar oriented plane layer of a nematic liquid crystal is considered. It is shown that nontrivial periodical solutions for the director disturbance exist if divergent (splay-bend) terms in the Frank energy are taken into account. This solution has a wave vector, which is perpendicular to the initial director orientation. The correlations connecting the magnitude of the coefficient for divergent terms with wave number, layer thickness, and other parameters of the media are obtained. This formula and some well-known experimental data are used for Frank splay-bend constant estimation.*

**Key words:** splay-bend constant, nematic liquid crystals, surface elastic constant.

### Введение

Линейные периодические структуры («роллы» [1]) могут возникать в сдвиговых течениях нематических жидких кристаллов (НЖК) [1–3] под воздействием электрического [4–8] и магнитного [9] полей, а также при их комбинированном воздействии [10].

Обычно они проявляются в виде отклонений вектора ориентации  $\vec{n}$  (директора) от начального и наблюдаются оптически как чередующиеся темные и светлые полосы. Такие структуры во всех перечисленных случаях являются следствием воздействия на объем среды в целом.

Другой механизм возникновения периодических структур связан с граничными условиями. Для нематического жидкого кристалла квадратичное по градиентам директора  $\vec{n}$  разложение свободной энергии упругости ориентации Франка  $F_V$  содержит четыре независимых коэффициента [11] и с учетом постоянства длины  $\vec{n}$  может быть приведено к виду [12, 13]

$$2F_V = K_{11}(\operatorname{div}\vec{n})^2 + K_{22}(\vec{n} \cdot \operatorname{rot}\vec{n})^2 + K_{33}|\vec{n} \times \operatorname{rot}\vec{n}|^2 + K_{24}(\nabla_i n_j \cdot \nabla^j n^i - (\nabla_k n^k)^2).$$

Слагаемое с коэффициентом  $K_{24}$  может быть преобразовано в дивергентное выражение, поэтому оно не влияет на уравнения равновесия среды, однако его необходимо учитывать в граничных условиях. Наличие этого слагаемого может приводить к появлению нетривиальных решений для ячейки НЖК с гибридной ориентацией на стенках [14], периодических решений для слоев с различными краевыми условиями [15–18], неустойчивости как капиллярных поверхностных волн [13], так и малых возмущений твердой стенки [19], а также сдвиговых течений НЖК [20].

В настоящей работе рассматривается задача нахождения периодических возмущенных решений для слоя НЖК с параллельной стенкам (планарной) невозмущенной ориентацией на границах. Исследуется зависимость периода таких решений от толщины слоя и параметров среды.

### Постановка задачи

Рассмотрим слой НЖК, который в декартовых координатах  $(x, y, z)$  ограничен плоскостями  $z = \pm h$  с невозмущенной

ориентацией директора  $\vec{n} = (0, 1, 0)$ . Пусть возмущенное состояние директора имеет вид  $\vec{n} = (-\sin \varphi \cos \theta, \cos \varphi \cos \theta, -\sin \theta)$ . Тогда для углов отклонения  $\varphi, \theta$  линейризованные уравнения равновесия сводятся к следующей системе, где индекс означает частную производную по соответствующей координате [5, 14]:

$$K_{22}\theta_{xx} + K_{11}\theta_{zz} = (K_{22} - K_{11})\varphi_{xz} \quad (1)$$

$$K_{11}\varphi_{xx} + K_{22}\varphi_{zz} = (K_{22} - K_{11})\theta_{xz} \quad (2)$$

Не ограничивая общности, будем искать решения системы (1), (2) в виде

$$\theta = f(z)\sin(kx), \quad \varphi = g(z)\cos(kx) \quad (3)$$

при условии, что  $k > 0$ , тогда после подстановки (3) в (1) и (2) можно получить выражения для  $f(z)$  и  $g(z)$  в общем виде:

$$f(z) = (D_1 + D_2z)\exp(kz) + (D_3 + D_4z)\exp(-kz) \\ g(z) = (A_1 + A_2z)\exp(kz) + (A_3 + A_4z)\exp(-kz),$$

где коэффициенты  $A_i$  и  $D_i$  в силу уравнений (1), (2) связаны соотношениями [14]

$$A_2 = D_2, \quad kA_1 - kD_1 = \lambda A_2, \quad A_4 = -D_4, \\ kA_3 - kD_3 = \lambda D_4, \quad \lambda = \frac{(K_1 + K_2)}{(K_1 - K_2)}. \quad (4)$$

На стенках будем использовать модель Рапини – Папулара слабого сцепления директора с границей [21], когда анизотропная часть поверхностной энергии задается выражением  $2F_S = W(1 - (\vec{n}, \vec{m})^2)$ , где  $W$  – постоянный коэффициент, вектор  $\vec{m}$  – ось легкого ориентирования, которая в общем случае может свободно вращаться по конусу с заданным углом между образующей и нормалью к поверхности. Граничные условия для такой модели, когда ось легкого ориентирования направлена вдоль границы (планарная ориентация), для углов  $\varphi, \theta$  приводятся к виду [19, 22, 23]

$$K_{11}\theta_z - \varphi_x(K_{24} - K_{11}) = \mp W\theta, \\ K_{22}\varphi_z = \theta_x(K_{22} - K_{24}), \quad (5)$$

где в первом уравнении (5) верхний и нижний знаки отвечают верхней и нижней границам  $z = \pm h$  соответственно, второе условие одинаково для обеих границ.

В результате соотношения (4) и граничные условия (5) приводят к однородной системе на коэффициенты  $A_i$  и  $D_i$ .

Для существования нетривиальных периодических решений для возмущений необходимо равенство нулю определителя этой системы, которое распадается на два уравнения

$$\pm 2(K_{22} - K_{11})hK_{24}^2k^2 + kK_{24}(4K_{11}K_{22} - K_{24}(K_{11} + K_{22}))sh(2kh) + 2W(ch(2kh) \pm 1)K_{11}K_{22} = 0, \quad (6)$$

позволяющие определить волновое число  $k$  как функцию толщины слоя и параметров среды.

### Исследование решения

Изучим решения уравнения (6) на примере метоксибензилиденбутиланилина (МББА), когда  $K_{11} = 6 \cdot 10^{-12}$  Н,  $K_{22} = 4 \cdot 10^{-12}$  Н [11]. Введем параметр  $p = K_{24} / (K_{11} + K_{22})$ . Тогда анализ первого (со знаком «+») из соотношений (6) показывает, что при указанных значениях параметров среды решения уравнений (6) для  $k > 0$  существуют только при  $p > 0,8$ , а у второго – при  $p > 0,96$ . Заметим также, что существование решения уравнения (6) при каких-то значениях параметра  $p$  возможно только для очень тонких слоев. Например, численный анализ показывает, что при  $p = 0,88$  нетривиальные периодические решения возможны только при  $h < 10^{-8}$  м, при которых неприменима континуальная модель.

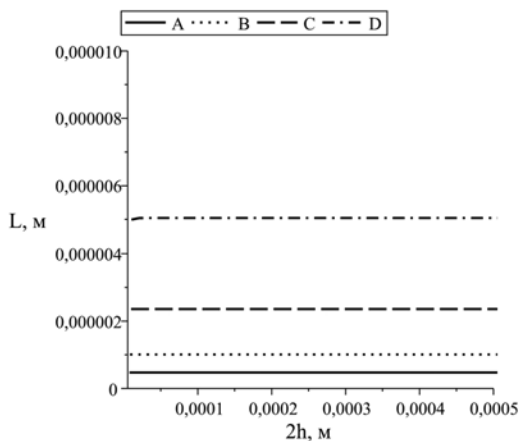


Рис. Зависимость периода  $L$  от толщины слоя  $2h$ ;  $A$  и  $C$  при  $p = 1,2$ ;  $B$  и  $D$  при  $p = 1,4$ ;  $A$  и  $B$  при  $W = 40$  мкН/м;  $C$  и  $D$  при  $W = 8$  мкН/м

Fig. Period  $L$  as function of layer thickness  $2h$ ;  $A$  and  $C$  for  $p = 1,2$ ;  $B$  and  $D$  for  $p = 1,4$ ;  $A$  and  $B$  for  $W = 40$   $\mu$  N/m;  $C$  and  $D$  for  $W = 8$   $\mu$  N/m

На рисунке приведена построенная численно зависимость периода решений  $L = \pi/k$  (рассматривается период отклонений директора с учетом эквивалентности направлений  $\vec{n}$  и  $-\vec{n}$ ) от толщины слоя в диапазоне 10–500 микрон для значений параметра  $p = 1,2$ ,  $p = 1,4$  и  $W = 4 \cdot 10^{-5}$ ,  $W = 8 \cdot 10^{-6}$  Н/м для уравнения (6), взятого со знаком «–», которая показывает, что для рассмотренных параметров период практически не зависит от толщины слоя, а определяется характеристиками среды и ее взаимодействием с границей.

Рассмотрим также соотношение (6) при  $W = 0$ . В этом случае оно сводится к уравнениям, решения которых существуют при  $0,8 < p < 1,2$ , при этом они имеют вид  $kh = C = const$ . Это приводит к линейной зависимости ширины полос  $L$  от толщины слоя  $2h$ . Такой вид зависимости  $L(h)$  наблюдался, например, в экспериментах [2, 3], где было установлено, что  $L \approx 2h$ . Вычисление  $p$  в этом случае позволяет определить, что для МББА  $K_{24} \approx 9,6 \cdot 10^{-12}$  Н/м, причем относительная разность между решениями уравнений (6) составляет менее 1 %. Однако для более точного вычисления величины  $K_{24}$  требуется дополнительное изучение допустимости применения условия  $W = 0$  на стенках в случае указанных экспериментов, кроме того, необходимо исследование точности применения линейного приближения. Заметим также, что оценка, выполненная другим способом и для других сред в случае неодноконстантного приближения, дает  $K_{24} / K_{11} = 2,6 \div 3,1$  [12], а в работе [14] для одноконстантного приближения было получено, что  $K_{24} / K \approx 2$ .

### Выводы

В работе исследован вопрос о существовании нетривиальных периодических решений в задаче о малых возмущениях планарно-ориентированного плоского слоя НЖК. Показано, что такие решения возможны, если в энергии Франка упругости ориентации учитываются слагаемые, приводимые к дивергентному виду, при этом величина коэффициента  $K_{24}$  должна превышать некоторое критическое значение.

Получена зависимость периода таких решений от толщины слоя. Предложена новая интерпретация полученных ранее экспериментальных данных, на основании которой сделана количественная оценка величины  $K_{24}$  для МББА.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 15-01-00361.

#### Список литературы / References

- Pieranski P., Guyon E. Instability of certain shear flows in nematic liquids. *Phys. Rev. A.*, 1974, **9** (1), 404–417. DOI: 10.1103/PhysRevA.9.404.
- Голованов А. В., Казначеев А. В., Сонин А. С. Ориентационная неустойчивость лиотропного нематика при течении // *Известия РАН. Сер. Физическая*. 1998. Т. 62, № 2. С. 1658–1661. [Golovanov A.V., Kaznacheev A.V., Sonin A.S. Orientational instability of liotropic nematic under flow. *Bull. Russ. Acad. Sci. Phys.*, 1998, **62** (2), 1658–1661 (in Russ.)].
- Пасечник С. В., Крехов А. П., Шмелева Д. В., Насибуллаев И. Ш., Цветков В. А. Ориентационная неустойчивость в нематическом жидком кристалле в затухающем пуазейлевском потоке // *ЖЭТФ*. 2005. Т. 127, № 4. С. 907–914. [Pasechnik S.V., Shmeleva D.V., Tsvetkov V.A., Krekhov A.P., Nasibullaev I.Sh. Orientational instability in a nematic liquid crystal in a decaying Poiseuille flow. *J. Exp. Theor. Phys.*, 2005, **100** (4), 804–810. DOI: 10.1134/1.1926441].
- Тихомирова Н. А., Гинзбург А. В., Кирсанов Е. А., Бобышев Ю. П., Пикин С. А., Адоменас П. В. О новом типе неустойчивостей в жидких кристаллах // *Письма в ЖЭТФ*. 1976. Т. 24, вып. 5. С. 301–304. [Tikhomirova N.A., Ginzberg A.V., Kirsanov E.A., Bobyshev Yu.P., Pikin S.A., Adomenas P.V. Concerning a new type of instability in liquid crystals. *JETP Lett.*, 1976, **24**, 269–272.].
- Bobylev Y.P., Chigrinov V.G., Pikin S.A. Threshold flexoelectric effect in nematic liquid crystal // *J. Phys. Colloques*, 1979, **40** (C3), C3-331–C3-333. DOI: 10.1051/jphyscol:1979364.
- Blinov L.M. Domain instabilities in liquid crystals. *J. Phys. Colloques*, 1979, **40** (C3), C3-247–C3-258. DOI: 10.1051/jphyscol:1979348.
- Hinov N.P., Vistin L.K. Parallel and cross-like domains due to d.c. and low frequency ( $<2\text{Hz}$ ) electric fields in nematic liquid crystal layers with negative dielectric anisotropy. *J. Phys. France*, 1979, **40** (3), 269–292. DOI: 10.1051/jphys:01979004003026900.
- Blinov L.M., Trufanov A.N., Chigrinov V.G., Barnik M.I. Electro-convective flows and domain instabilities in nematic liquid crystals. *Mol. Cryst. Liq. Cryst.*, 1981, **74**, 1–18. DOI: 10.1080/00268948108073690.
- Hui Y.W., Kuzma M.R., San Miguel M., Labes M.M. Periodic structures induced by director reorientation in the lyotropic nematic phase of disodium cromoglycate-water. *J. Chem. Phys.*, 1985, **83** (1), 288–292. DOI: 10.1063/1.449822.
- Pikin S.A., Chigrinov V.G., Indenbom V.L. New types of instabilities in liquid crystals with tilted orientation. *Mol. Cryst. Liq. Cryst.*, 1976, **37**, 313–320. DOI: 10.1080/15421407608084365.
- Сонин А. С. Введение в физику жидких кристаллов. М.: Наука, 1983. 319 с. [Sonin A.S. Introduction into the physic of liquid crystals. Moscow: Nauka, 1983, 319 p. (in Russ.)].
- Polak R.D., Crawford G.P., Kostival B.C., Doane J.W., Zumer S. Optical determination of the saddle-splay elastic constant  $K_{24}$  in nematic liquid crystals. *Phys. Rev. E*, 1994, **49** (2), R978–R981. DOI: 10.1103/PhysRevE.49.R978.
- Golubiatnikov A.N., Kalugin A.G. On short surface waves in nematic liquid crystals. *Mol. Cryst. and Liq. Cryst. Science and Techn. Sect. A. Mol. Cryst. Liq. Cryst.*, 2001, **366**, 879–884. DOI: 10.1080/10587250108024030.
- Sparavigna A., Lavrentovich O.D., Strigazzi A. Magnetic field effect on periodic stripe domains in nematic liquid crystals. *Phys. Rev. E*, 1995, **51** (1), 792–796. DOI: 10.1103/PhysRevE.51.792.
- Alexe-Ionescu A.L., Barbero G., Lelidis I. Periodic deformations in nematic liquid crystals. *Phys. Rev. E*, 2002, **66** (6), 061705-1–10. DOI: 10.1103/PhysRevE.66.061705.
- Barbero G., Lelidis I., Zvezdin A.K., Splay-bend periodic deformation in nematic liquid crystal slabs, *Phys. Rev. E*, 2003, **67** (6), 061710-1–5. DOI: 10.1103/PhysRevE.67.061710.
- Rosso R., Virga E.G., Kralj S. Local elastic stability for nematic liquid crystals. *Phys. Rev. E*, 2004, **70** (1), 011710-1–11. DOI: 10.1103/PhysRevE.70.011710.
- Калугин А. Г. О роли дивергентных членов в энергии Франка нематических жидких кристаллов // *Вестн. МГУ. Сер. I: Математика. Механика*. 2013. № 1. С. 69–71. [Kalugin, A.G. The role of divergent terms in the Frank energy of nematic liquid crystals. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 2013, **68** (1), 32–34. DOI: 10.3103/S002713301301007X].
- Калугин А. Г. О равновесии слоя нематического жидкого кристалла с неоднородной границей // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 2015. Т. 50, № 2. С. 3–7. [Kalugin A.G. On the equilibrium of the layer of a nematic liquid crystal with an inhomogeneous boundary. *Fluid Dynamics.*, 2015, **50** (2), 181–185. DOI: 10.1134/S0015462815020015].

- 
- 
20. Калугин А. Г. Об ориентационной неустойчивости слоя лиотропного нематического жидкого кристалла // *Вестн. МГУ. Сер. I: Математика. Механика*. 2016. № 2. С. 57–59. [Kalugin A.G. Orientational instability of a lyotropic nematic liquid crystal layer. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 2016, **71** (2), 39–41. DOI: 10.3103/S0027133016020035].
21. Rapini A., Papoular M. Distorsion d'une lamelle nematique sous champ magnetique conditions d'ancrage aux parois. *J. Phys. Colloques.*, 1969, **30** (C4), C4-54–C4-56. DOI: 10.1051/jphyscol:1969413.
22. Калугин А. Г., Голубятников А. Н. О равновесной форме капли нематического жидкого кристалла // *Современные методы механики сплошных сред: Труды Математического ин-та им. В.А. Стеклова РАН*. 1998. Т. 223. С. 171–177. [Kalugin A.G., Golubyatnikov A.N. Equilibrium Shape of a Nematic Liquid-Crystal Droplet. *Proc. of the Steklov Institute of Mathematics*, 1998, **223**, 168–174].
23. Kini U.D. Magnetic and electric field induced periodic deformations in planar oriented nematics. *Liquid Crystals*, 1998, **24** (2), 177–199. DOI: 10.1080/026782998207352.

Поступила в редакцию 24.04.2017 г.  
Received 24 April 2017