

УДК 532.783

А. В. Голованов, Е. Н. Рыжов*, Е. А. Смирнов*, А. М. Чебанюк**

ПОРОГОВОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ОБРАЗОВАНИЯ ДОМЕННОЙ СТРУКТУРЫ В НЕМАТИЧЕСКИХ ЖК ПРИ ДЕФОРМАЦИИ ПОПЕРЕЧНОГО ИЗГИБА

THRESHOLD MAGNETIC FIELD FOR THE DOMAIN STRUCTURE FORMATION IN NEMATIC LIQUID CRYSTALS AT THE TRANSVERSE BENDING DEFORMATION

Институт элементоорганических соединений им. А. Н. Несмеянова РАН, лаборатория физической химии полимеров, 119991 Москва, ГСП-1, В-334, ул. Вавилова, д. 28

*Волгоградский государственный технический университет

**Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ)

Для эффекта переходной гидродинамической неустойчивости, возникающей в нематиках при деформации поперечного изгиба в магнитном поле, аналитически получена зависимость $h^2(\tilde{q}^2)$ – квадрата безразмерной напряженности магнитного поля от квадрата безразмерного волнового вектора доменной структуры. Показано, что: а) функция $h^2(\tilde{q}^2)$ является результатом деления с остатком двух многочленов четвертой и второй степени с коэффициентами, которые определяются комбинациями четырех безразмерных вязкостей $\frac{\eta_2}{\eta_1}$, $\frac{\eta_6}{\eta_1}$, $\frac{\eta_7}{\eta_1}$, $\frac{\eta_8}{\eta_1}$; б) значение h^2 в минимуме функции $h^2(\tilde{q}^2)$ является квадратом порогового поля доменообразования h_D^2 .

Ключевые слова: нематик, деформация поперечного изгиба, магнитное поле, переходная гидродинамическая неустойчивость, пороговое поле доменообразования.

The dependency $h^2(\tilde{q}^2)$ (the square of the dimensionless magnetic field tension on the square of the dimensionless wave vector of the domain structure) is analytically received for the effect of the transitional hydrodynamic instability, appearing in nematics at the transverse bending deformation in a magnetic field. It is shown that: a) the function $h^2(\tilde{q}^2)$ is the result of division with the remainder of two polynomials of the fourth and the second degrees with the coefficients, which are defined by combination of four dimensionless viscosities $\frac{\eta_2}{\eta_1}$, $\frac{\eta_6}{\eta_1}$, $\frac{\eta_7}{\eta_1}$, $\frac{\eta_8}{\eta_1}$; b) the value of h^2 at the minimum of the function $h^2(\tilde{q}^2)$ is a square of the threshold field of the domain formation h_D .

Key words: nematics, transverse bending deformation, magnetic field, transitional hydrodynamic instability, threshold field of domain formation.

Введение

Эффект переходной гидродинамической неустойчивости нематиков в магнитном поле известен давно [1—3]. Это явление характерно появлением системы темных и светлых полос в слое жидкого кристалла, если его внести в магнитное поле, напряженность которого много больше, чем критическое поле Фредерикса H_F для данного слоя. Система полос, представляющая собой вихревые линии, получила название «доменная структура», или МГД-домены. Отличие МГД-неустойчивости от электрогидродинамической неустойчивости [4] состоит в том, что доменная структура в первом случае является переходной – при включении магнитного поля домены появляются, развиваются и затем исчезают.

В [1] теоретически и экспериментально были изучены МГД-домены, возникающие при деформации поперечного изгиба в типичном термотропном нематике *n*-метоксибензилиден-*n'*-*n*-бутиланилине (МББА). Из уравнений нематодинамики получены дисперсионные зависимости $s(\tilde{q}^2)$ обратного времени включения доменов от величины безразмерного волнового вектора при различных значениях квадрата безразмерной напряженности магнитного поля h^2 . Также экспериментально была определена зависимость $\tilde{q}^2(h^2)$. Было показано, что функция $s(\tilde{q}^2, h^2)$ (в одноконстантном приближении) определяется соотношениями между шестью коэффициентами вязкости Лесли α_i и коэффициентом вращательной вязкости γ_1 . Для анализа функции $s(\tilde{q}^2, h^2)$ в качестве модельной системы был выбран МББА, так как для него все эти коэффициенты к моменту опубликования работы были измерены [5]. Здесь надо отметить, что хотя в [1] и получена экспериментальная зависимость $\tilde{q}^2(h^2)$, но ее вид аналитически не был определен. Она была задана лишь графически как кривая, пересекающая функцию $s(\tilde{q}^2)$ в максимумах, соответствующих наиболее быстрому росту неустойчивости при различных значениях h^2 . Кроме того, ни теоретически, ни экспериментально не был решен вопрос о нахождении критического поля доменообразования. Однако, например, в [6], где теоретически рассматривалась задача о возникновении МГД-доменов в нематике при деформации кручения, показано, что зависимость $h^2(\tilde{q}^2)$ является квадратичной функцией с коэффициентами, представляющими собой комбинации безразмерной константы упругости и двух безразмерных коэффициентов вязкости. Пороговое поле доменообразования h_D , являющееся точкой фазового перехода второго рода, так же определяется отношением безразмерных констант упругости и вязкости. В [7] для лиотропного нематика в системе краситель дисульфоиндантрон – вода при исследовании доменной структуры, возникающей из деформации кручения в магнитном поле, были определены коэффициенты функции $h^2(\tilde{q}^2)$ и вычислены безразмерные константа упругости и два коэффициента вязкости.

Исходя из сказанного выше целью настоящей работы является получение явного вида функции $h^2(\tilde{q}^2)$ и определение порогового поля доменообразования h_D . Это позволит использовать полученные данные в экспериментах по изучению МГД-доменов, например, в лиотропных каламитиках.

Результаты и их обсуждение

Рассмотрим дисперсионную зависимость $s(\tilde{q}^2, h^2)$, полученную (в приближении $K_1 = K_3$) в [1]:

$$s = \frac{\chi_a H_F^2 [h^2 - \tilde{q}^2 - 1]}{\gamma_1 - \frac{(\alpha_2 \tilde{q}^2 - \alpha_3)^2}{\eta_2 \tilde{q}^4 + N \tilde{q}^2 + \eta_1}}, \quad (1)$$

где χ_a – анизотропия диамагнитной восприимчивости, H_F – критическое поле Фредерика для деформации поперечного изгиба, $h = \frac{H}{H_F}$, $\tilde{q} = \frac{q_x}{q_z}$, $q_z = \frac{\pi}{d}$, d – толщина слоя

нематика, $\eta_1 = \frac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6)$, $\eta_2 = \frac{1}{2}(-\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5)$, $N = \eta_5 - \eta_4 - \eta_6 + \alpha_4$ (*)

$\eta_4 = \frac{1}{2}(-\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6)$, $\eta_5 = \alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$, $\eta_6 = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5)$, α_i – коэффициенты вязкости Лесли, γ_1 – вращательная вязкость. Соотношение (*) сводится к комбинации четырех коэффициентов Лесли, а именно: $N = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = \alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_6 - \alpha_2$.

Как следует из (1), поведение функции $s(\tilde{q}^2, h^2)$ определяется семью коэффициентами. Покажем, что при определенных допущениях количество этих коэффициентов можно сократить. Для этого преобразуем (1) к следующему виду

$$s = \frac{1}{\chi_a H_F^2} \frac{(h^2 - \tilde{q}^2 - 1)(\eta_2 \tilde{q}^4 + \eta_7 \tilde{q}^2 + \eta_1)}{\left(\eta_2 - \frac{\alpha_2^2}{\gamma_1}\right) \tilde{q}^4 + \left(\eta_7 - \frac{2\alpha_2 \alpha_3}{\gamma_1}\right) \tilde{q}^2 + \left(\eta_1 - \frac{\alpha_3^2}{\gamma_1}\right)}, \quad (2)$$

здесь введено обозначение: $\eta_7 = N$. В [8] приведены данные по значениям коэффициентов вязкости Месовича η_1, η_2 и вращательной вязкости γ_1 для некоторых термотропных каламитиков. Из этих данных следует, что для всех представленных ЖК выполняется примерное равенство:

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \approx 1 (**).$$

Положим этот факт в основу дальнейших рассуждений. Тогда коэффициенты многочлена, стоящего в знаменателе правой части уравнения (2), можно представить в виде

$$\eta_2 - \frac{\alpha_2^2}{\gamma_1} \approx \eta_6,$$

$$\eta_7 + \frac{2\alpha_2 \alpha_3}{\gamma_1} \approx \alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_5 - \alpha_3 = \eta_8,$$

$$\eta_1 - \frac{\alpha_3^2}{\gamma_1} \approx \eta_1,$$

а (2) записать как

$$\tilde{s} = \tau_0 s = \frac{(h^2 - q - 1)(aq^2 + bq + 1)}{cq^2 + dq + 1}, \quad (3)$$

где $\tau_0 = \frac{\gamma_1 d^2}{\pi^2 K_{11}}$ – характерное время, $q = \tilde{q}^2$, $a = \frac{\eta_2}{\eta_1}$, $b = \frac{\eta_6}{\eta_1}$, $c = \frac{\eta_7}{\eta_1}$, $d = \frac{\eta_8}{\eta_1}$.

На рисунке 1 представлено семейство кривых $\tilde{s}(q)$, параметризованных переменной h^2 (здесь для определения величин a, b, c и d использованы значения коэффициентов вязкости МВВА: $a = 4,35$; $b = 1,09$; $c = 5,66$; $d = 5,76$). Из рисунка 1 следует, что кривая $\tilde{s}(q)$ трансформируется – монотонное убывание при некотором значении h^2 (см. кривые 1—4 на рис. 1) заканчивается и на кривой появляются локальные минимум и максимум (кривые 5—7), которые при дальнейшем увеличении h^2 не исчезают. Такое поведение функции под действием некоторого параметра называется *катастрофой складки*, а параметр, отвечающий за трансформацию, является *управляющим параметром* [9]. Таким образом, появляется возможность исследовать поведение (3) с помощью математического аппарата теории катастроф, изучающей вопрос о том, как состояния равновесия потенциальной функции $U(x_i, s_k)$ изменяются при изменении управляющих параметров s_k [10].

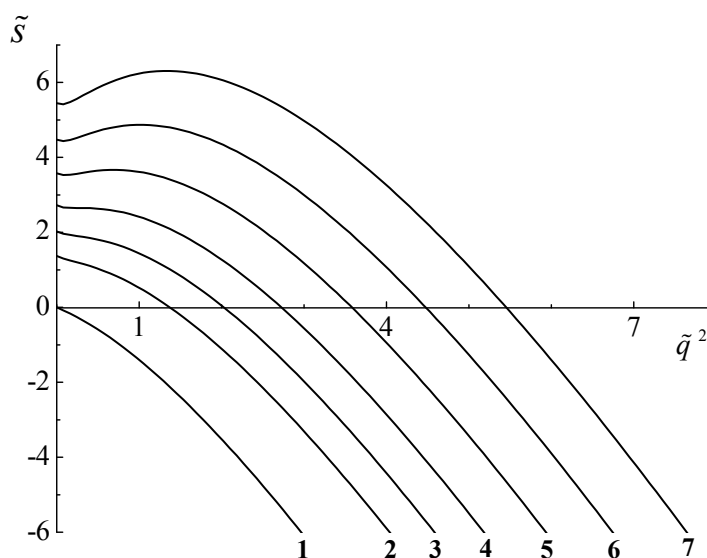


Рис. 1. Семейство кривых $\tilde{s}(q)$, параметризованных переменной h^2 :
 1 – $h^2 = 1$; 2 – $h^2 = 2,37$; 3 – $h^2 = 3,03$; 4 – $h^2 = 3,74$; 5 – $h^2 = 4,58$;
 6 – $h^2 = 5,47$; 7 – $h^2 = 6,45$

В нашем случае катастрофа складки задается семейством функций (3), зависящих от одного управляющего параметра h^2 . Уравнение $\frac{d\tilde{s}}{dq} = 0$ определяет многообразие катастрофы. Задача сводится к нахождению критических точек катастрофы и дважды вырожденных критических точек, которые определяются соответственно из уравнений $\frac{d\tilde{s}}{dq} = 0$ и $\frac{d^2\tilde{s}}{dq^2} = 0$. Функция, принадлежащая семейству, при значении параметра $h^2 < 3,74$ не имеет критических точек, при $h^2 = 3,74$ имеет одну дважды вырожденную критическую точку, а при $h^2 > 3,74$ – две критические точки (рис. 1). Геометрическое место критических точек определяется решением уравнения четвертой степени

$$abq^4 + 2adq^3 + (3a + cd + ad - bc - b)q^2 + 2(a + c - b)q + (1 + c - d) - h^2 [(ad - bc)q^2 + 2(a - b)q + (c - d)] = 0 \quad (4)$$

при различных значениях h^2 . Из (4) находим функцию, задающую критическое многообразие

$$h^2 = \frac{abq^4 + 2adq^3 + (3a + cd + ad - bc - b)q^2 + 2(a + c - b)q + (1 + c - d)}{(ad - bc)q^2 + 2(a - b)q + (c - d)}. \quad (5)$$

Критическое многообразие, задаваемое функцией (5), изображено на рис. 2.

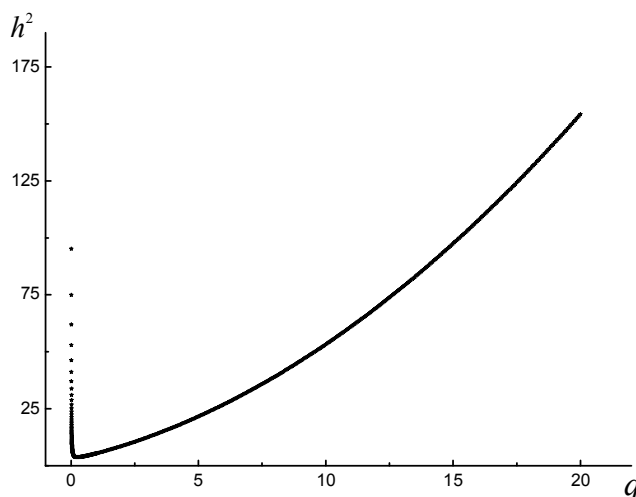


Рис. 2. Положение критических точек $\tilde{s}(q, h^2)$ как функции h^2

Дважды вырожденная критическая точка расположена в точке пространства R^2 с координатами $q = 0,26$ и $h^2 = 3,74$ (рис. 3). Точка (q, h^2) является в нашем случае не-морсовской-бифуркационной [10].

Проведем исследование локального поведения функции $\tilde{s}(q)|_{h^2=3,74}$ (см. кривая 4 на рис. 1) в окрестности дважды вырожденной критической точки $q = 0,26$ для выяснения типа устойчивости функции [10, 11]. Локальное поведение графика $\tilde{s}(q)$ в окрестности $q = 0,26$ может быть описано кубической параболой вида $c_3q^3 + c_2q^2 + c_1q + c_0$, где $c_3 = -1,57$, $c_2 = 1,34$, $c_1 = -0,39$, $c_0 = 2,69$. Поэтому разложим (3) в ряд Тейлора в окрестности критической точки до членов третьего порядка включительно. В результате имеем

$$\tilde{s} \approx C_3 (q - 0,26)^3 + C_2 (q - 0,26)^2 + C_1 (q - 0,26) + C_0, \quad (6)$$

где $C_3 = (0,58 - 0,59h^2)$, $C_2 = (-0,64 + 0,17h^2)$, $C_1 = (-1,62 + 0,43h^2)$,

$C_0 = (-1,35 + 1,08h^2)$. Функция (6) — это кубическая парабола вида

$$\tilde{s}' \approx C_3 q'^3 + C_2 q'^2 + C_1 q' + C_0, \quad (7)$$

рассматриваемая в новой системе координат, где $q' = q - q_c$ и $q_c = 0,26$.

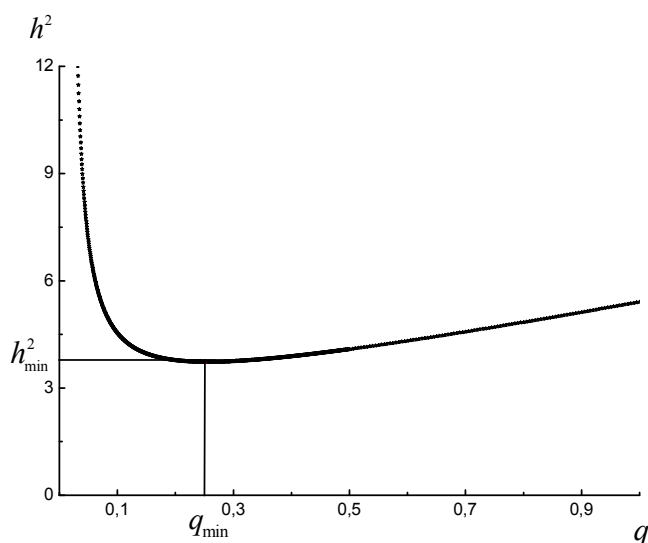


Рис. 3. Критический управляющий параметр является точкой минимума функции $h^2(q)$

Известно, что действие малых возмущений на функцию f (добавление к рассматриваемой функции малой поправки p), имеющую критические точки, либо сохраняет, либо изменяет их тип. С этой точки зрения второе, третье и четвертое слагаемые в (7) являются возмущением функции $C_3 q^3$. Так как коэффициент C_3 для любого $h^2 \geq 1$ остается отрицательным и его значения не влияют на появление неморсовской критической точки, то положим его равным минус единице и тогда

$$\tilde{s}' \approx -q'^3 + C_2 q'^2 + C_1 q' + C_0 = -q'^3 + p(q'). \quad (8)$$

Перенос начала координат ($q' = q - q_c$) дает

$$-q^3 + p(q) = -q^3 + b_2 q^2 + b_1 q + b_0, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} b_2 &= C_2 - 3q_c, \\ b_1 &= 3q_c^2 - C_2 q_c + C_1, \\ b_0 &= -q_c^3 + C_2 q_c^2 - C_1 q_c + C_0. \end{aligned}$$

Замена переменной по формуле $q = y - \frac{b_2}{3}$ сводит (9) к приведенной форме

$$F(y, h^2) = -y^3 + a_1 y + a_0, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{3} b_2^2 + b_1, \\ a_0 &= \frac{2}{27} b_2^3 + \frac{1}{3} b_1 b_2 + b_0. \end{aligned}$$

В выражении (10) коэффициент a_0 несущественен, поскольку отвечает за сдвиг функции вдоль оси ординат, поэтому его можно приравнять к нулю.

Для функции $-y^3$ возмущение имеет каноническую форму

$$F(y, h^2) = -y^3 + a_1 y. \quad (11)$$

До тех пор пока при изменении значений h^2 коэффициент a_1 остается меньшим нуля, функция (11) не имеет критических точек. Когда a_1 становится равным нулю, у (11) появляется неморсовская критическая точка $y = 0$ с двойным вырождением. В этом случае имеем случай структурной неустойчивости. Если же значение управляющего параметра h^2 определяет коэффициент a_1 как положительный, у кубической параболы появляются две изолированные критические точки (см. рис. 4), соответственно локальный морсовский минимум и максимум, геометрическое место которых определяется из квадратного уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -3y^2 + a_1 = 0.$$

Таким образом, при малых возмущениях уже линейного характера неморсовская точка $y = 0$ расщепляется на две морсовские.

Подобное поведение функции является типичным для *капсoidalных* катастроф, отвечающих геометрии канонической складки. Возникновение подобных катастроф сопровождается качественными перестройками в динамике формирования структур и качественного изменения их основных свойств [10].

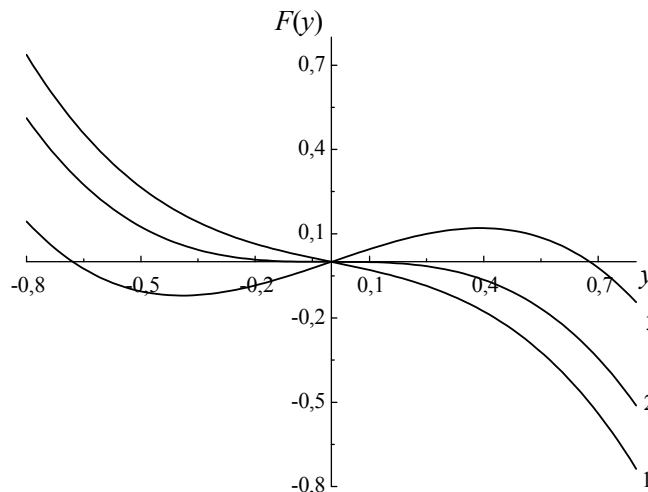


Рис. 4. Иллюстрация расщепления неморсовской критической точки семейства функций (11) :
 1 – при $a_1 < 0$ у функции нет критических точек; 2 – при $a_1 = 0$ существует дважды вырожденная критическая точка $y = 0$; 3 – $a_1 > 0$ появляются две критические точки, являющиеся максимумом и минимумом функции

Рассмотрим теперь окрестность любой критической точки, например $q = 0,55$. В этой точке и в точке $q = 0$ значения функции совпадают при $h^2 = 4,2$ ($\tilde{s} = 3,2$). Здесь надо отметить, что вплоть до величины $h^2 = 4,2$ значения \tilde{s} остаются максимальными в точке $q = 0$. На основании этого можно сделать вывод о том, что при полях $h^2 < 4,2$ реализуется переориентация нематика без образования доменов. И тогда значение $h^2 = 4,2$ нужно считать квадратом критического поля доменобразования. Если это так, то $\tilde{s}(q)$ в окрестности точки $q = 0,55$ должна быть структурно неустойчивой.

Точки графика $\tilde{s}(q)$ в окрестности $q = 0,55$ могут быть аппроксимированы квадратичной функцией вида $c_2q^2 + c_1q + c_0$, где $c_2 = -0,53$, $c_1 = 0,58$, $c_0 = 3,04$. Тогда, проводя анализ по схеме, описанной выше, имеем:

$$\tilde{s} \approx C_2(q - 0,55)^2 + C_1(q - 0,55) + C_0, \quad (12)$$

где $C_2 = (-0,41 - 0,03h^2)$, $C_1 = (-1,91 + 0,45h^2)$, $C_0 = (-1,87 + 1,21h^2)$. После сдвига (12) в начало координат возмущение функции $-q^2$ имеет вид

$$-q^2 + p(q) = -q^2 + b_1q, \quad (13)$$

где

$$b_1 = C_1 - 2C_2q_c,$$

и $q_c = 0,55$. Невозмущенная функция $-q^2$ имеет морсовскую критическую точку $q = 0$, возмущенная $q = \frac{1}{2}b_1$. Возмущение сдвинуло морсовскую критическую точку на величину, зависящую от коэффициента b_1 . При любых значениях h^2 критическая точка сдвигается, а тип критической точки не изменяется, следовательно, функции семейства (13) являются эквивалентными. Это говорит о том, что квадратичная функция является структурно устойчивой в окрестности критической точки $q = 0,55$. Таким образом, предположение о структурной неустойчивости точки с координатами $q = 0,55$ и $h^2 = 4,2$ приводит к противоречию с характером поведения ветвей графика.

Подобным же образом возмущение действует на квадратичную функцию в любой морсовской критической точке. Проведенный анализ локального поведения (3) позволяет сделать следующий вывод. Фазовый переход первого рода происходит в дважды вырожденной критической точке, поскольку в этой точке функция (3) локально является структурно неустойчивой. Эта точка является минимумом функции (5), а квадрат критического поля доменообразования h_D^2 находится из условия $\frac{d^2\tilde{s}}{dq^2} = 0$. В любой морсовской критической точке фазовый переход происходит не может в виду того, что в этих точках (3) локально является структурно устойчивой функцией.

Выражение (5) представляет собой отношение двух многочленов, причем степень многочлена, стоящего в числителе, больше степени многочлена, находящегося в знаменателе. Поэтому частное от деления этих многочленов представимо в виде суммы квадратичной функции и остатка:

$$h^2 = Aq^2 + Bq + C + \mu(q), \quad (14)$$

где

$$A = \frac{ab}{ad - bc},$$

$$B = \frac{2a(b(b - cd) + a(d^2 - b))}{(ad - bc)^2},$$

$$C = \frac{b^2 c^2 (b + bc - cd) + a^2 (8b^2 + bd(3c(1+d) - 4d) - cd^3)}{(ad - bc)^3} +$$

$$+ \frac{a^3 (d^2 - d^3 - 4b) + ab(2c^2 d^2 + bc(3d - 3cd - 4c) - 4b^2)}{(ad - bc)^3}.$$

Слагаемое $Aq^2 + Bq + C$ в (14) определяет многообразие катастрофы канонической складки. Для выяснения смысла функции $\mu(q)$ следует ввести интеграл

$$\int \mu(q) dq = \int \frac{O(q) dq}{(ad - bc)q^2 + 2(a - b)q + (c - d)},$$

где

$$O(q) = 2 [(a^4(4b - d^2) - a^3(12b^2 + 2bd(2c - 3d) + d^3(d - c)) +$$

$$+ b^3 c^2 (b + c(c - d)) + ab^2(c^2 d(d - c) + b(4cd - 6c^2) - 4b^2) +$$

$$+ a^2 b(12b^2 + cd^2(d - c) + 5b(c^2 - d^2))] \frac{1}{(ad - bc)^3} q +$$

$$+ [a^3(4b(c - d) - cd^2) + b^2 c^2 (b + c(c - d))d +$$

$$+ a^2(c(c - d)d^3 + bd(10cd - 3c^2 - 4d^2) - 8b^2(c - d)) +$$

$$+ ab(4b^2(C - D) + 2c^2 d^2(d - C) + bc(4c^2 + 3d^2 - 10cd))] \frac{1}{(ad - bc)^3}.$$

Этот интеграл искажает каноническую форму складки, обусловленной физикой процесса складкообразования, и определяет расстояние от канонической формы складки до исследуемой складки в пространстве значений параметра h^2 .

Заключение

В настоящей работе аналитически получена зависимость $h^2(\tilde{q}^2)$ – квадрата безразмерной напряженности магнитного поля от квадрата безразмерного волнового вектора доменной структуры, что позволяет использовать ее в экспериментах по наблюдению МГД-доменов при деформации поперечного изгиба в нематиках различного типа.

Исследование зависимости $h^2(\tilde{q}^2)$ позволяет вскрыть механизм образования структур, связанный с процессами складкообразования. Эта зависимость определяется безразмерными коэффициентами вязкости $\frac{\eta_2}{\eta_1}, \frac{\eta_6}{\eta_1}, \frac{\eta_7}{\eta_1}, \frac{\eta_8}{\eta_1}$. Следовательно, появляется возможность их экспериментального определения. Кроме того, в работе показано, что фазовый переход первого рода происходит в точке минимума функции $h^2(\tilde{q}^2)$, а значение величины h^2 в этой точке является квадратом порогового поля доменообразования h_D^2 .

Список использованной литературы

1. Guyon E., Meyer R., Salan J. // Mol. Cryst. Liq. Cryst. 1979. Vol. 54. P. 261.
2. Lonberg F., Fraden S., Hurd A., Meyer R. // Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 52, № 21. P. 1903.
3. Hurd A., Fraden S., Lonberg F., Meyer R. // J. Phys. 1985. Vol. 46. P. 905.

- ~~~~~
4. *Пикин С. А.* Структурные превращения в жидких кристаллах. М. : Наука, 1981. 336 с.
 5. *Блинов Л. М.* Электро- и магнитооптика жидких кристаллов. М. : Наука, 1978. 384 с.
 6. *Казначеев А. В.* // Mol. Mat. 1993. Vol. 2. P. 283.
 7. *Golovanov A., Kaznacheev A., Sonin A.* // Mol. Mat. 1993. Vol. 3. P. 147.
 8. *Беляев В. В.* Вязкость нематических жидких кристаллов. М. : Физматлит, 2001. 224 с.
 9. *Томпсон Дж.* Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. М. : Мир, 1985. 254 с.
 10. *Гилмор Р.* Прикладная теория катастроф. М. : Мир, 1984. Т. 1. 350 с.; Т. 2. 285 с.
 11. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и её приложения. М. : Мир, 1980. 608 с.

Поступила в редакцию 14.01.2013 г.