

УДК 532.783

А. В. Голованов

БИФУРКАЦИЯ ТИПА ВИЛКИ И ПРИЧИНА ЕЕ РАЗРУШЕНИЯ ПРИ ДЕФОРМАЦИИ КРУЧЕНИЯ НЕМАТИКА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Институт элементоорганических соединений им. А. Н. Несмеянова РАН,
ул. Вавилова, д. 28, 119991 Москва, Россия.
E-mail: gav@ineos.ac.ru

Исследовано бифуркационное поведение нематического жидкого кристалла при деформации кручения в магнитном поле. Показано, что переход Фредерикса является бифуркацией типа вилки. Наличие угла между первоначальным направлением директора и направлением магнитного поля уничтожает бифуркацию. Построенные по результатам анализа бифуркационная диаграмма и зависимость стационарных решений эволюционного уравнения от управляющих параметров иллюстрируют полученные результаты.

Ключевые слова: нематик, деформация кручения, бифуркация, бифуркация типа вилки, бифуркационная диаграмма.

DOI: 10.18083/LCAppl.2020.2.55

A. V. Golovanov

PITCHFORK BIFURCATION AND THE CAUSE OF ITS DESTRUCTION DURING TWIST DEFORMATION OF A NEMATIC IN A MAGNETIC FIELD

Institute of Organoelement Compounds, RAS,
28 Vavilova St., Moscow, 119991, Russia
E-mail: gav@ineos.ac.ru

The bifurcation behavior of a nematic liquid crystal under torsional strain in a magnetic field was investigated. It is shown that the Fredericksz transition is a pitchfork bifurcation. The presence of an angle between the initial direction of the director and the direction of the magnetic field destroys the bifurcation. The bifurcation diagram constructed according to the analysis results and the dependence of the stationary solutions of the evolution equation on the control parameters illustrate the results obtained.

Key words: nematic, twist deformation, bifurcation, pitchfork bifurcation, the bifurcation diagram.

Введение

Явление бифуркации универсально для систем любой природы [1, 2]. В основе теоретического исследования бифуркаций лежит линейный анализ устойчивости (ЛАУ) динамических систем [3]. Основой ЛАУ является оценка устойчивости стационарных решений дифференциальных уравнений, называемых эволюционными. С помощью ЛАУ находят неустойчивые состояния системы, в которых следует ожидать бифуркации. Схема исследования бифуркационного поведения динамической системы включает определение точек бифуркации с помощью ЛАУ, типа бифуркации и построение бифуркационной диаграммы.

Хотя ЛАУ уже не раз доказывал свою эффективность при исследовании поведения динамических систем живой и неживой природы, но до настоящего времени исследования бифуркацион-

ного поведения нематиков при их переориентации во внешних полях не проводились. Поэтому целью данной работы является определение бифуркационного поведения нематика в случаях перехода Фредерикса (ПФ) и при переориентации в магнитном поле произвольной ориентации по отношению к директору в геометрии кручения.

Результаты и их обсуждение

Деформация кручения нематика (ПФ)

Рассмотрим деформацию кручения планарного слоя нематика толщиной d с положительной анизотропией диамагнитной восприимчивости (см. рис. 1). Считаем, что на границах директор закреплен жестко. Геометрия кручения выбрана по причине отсутствия течения ($\vec{v} \equiv 0$) при переориентации директора в магнитном поле [4].

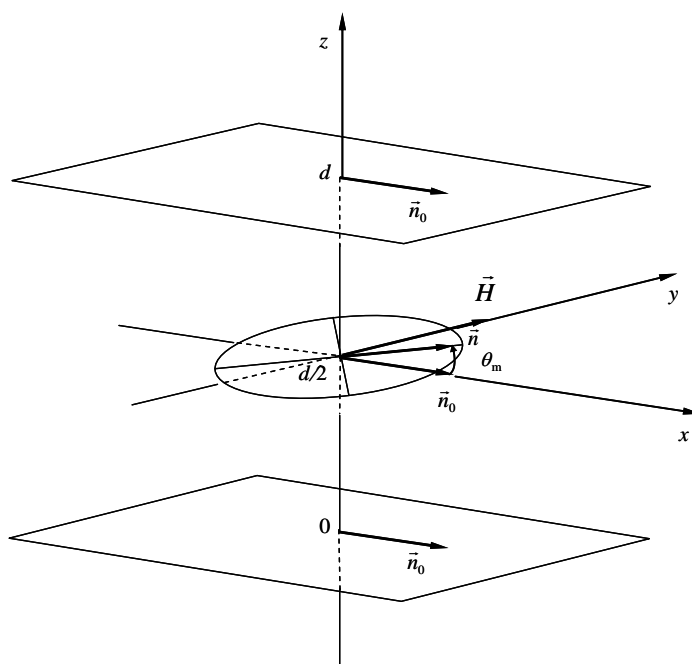


Рис. 1. Геометрия задачи

Fig. 1. Geometry of the problem

Динамику переориентации нематика в магнитном поле описывает уравнение движения директора, не содержащее слагаемых, описывающих макроскопическое движение. Для удобства запишем его в безразмерном виде:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{z}^2} + \frac{1}{2} h^2 \sin 2\theta, \quad (1)$$

где $\tilde{z} = \frac{\pi}{d} z$ – безразмерная координата, $\tilde{t} = \frac{t}{\tau_0}$ –

безразмерное время, $\tau_0 = \frac{\gamma_1 d^2}{\pi^2 K_2}$ – характерное

время задачи, $h = \frac{H}{H_F}$ – безразмерный параметр

задачи, $H_F = \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{K_2}{\chi_a}}$ – критическое поле Фредерикса для деформации кручения. Отклонение директора от положения равновесия считаем малым. Разложим $\sin 2\theta$ в ряд, учитывая первый нелинейный член [5]. Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{z}^2} + h^2 \theta - \frac{2}{3} h^2 \theta^3. \quad (2)$$

Для дальнейшего анализа (2) необходимо преобразовать к эволюционному уравнению (ЭУ) [3]. Распределение $\theta(\tilde{z}, \tilde{t})$ при наличии жестких граничных условий и малости возмущений вблизи точки перехода имеет вид [5]

$$\theta(\tilde{z}, \tilde{t}) = a(\tilde{t}) \sin \tilde{z}. \quad (3)$$

Подставляем функцию (3) в (2). В результате имеем

$$\frac{da}{d\tilde{t}} \sin \tilde{z} = (h^2 - 1)a \sin \tilde{z} - \frac{2}{3} h^2 a^3 \sin^3 \tilde{z}. \quad (4)$$

Интегрируем (4) по $d\tilde{z}$ в пределах от 0 до π и получаем ЭУ задачи

$$\frac{da}{d\tilde{t}} = Ma - Na^3 = F, \quad (5)$$

где

$$M = (h^2 - 1); \quad N = \frac{4}{9} h^2.$$

Далее проведем ЛАУ для (5). Находим стационарные решения из условия

$$\left. \frac{da}{d\tilde{t}} \right|_{cm} = 0. \quad (*)$$

Существуют три стационарных решения:

1) $a_{cm1} = 0$ и, следовательно, $\theta_{cm1} = a_{cm1} \sin \tilde{z} = 0$

2) $a_{cm2,3} = \pm \sqrt{\frac{M}{N}}$, тогда

$$\theta_{cm2,3} = a_{cm2,3} \sin \tilde{z} = \pm \sqrt{\frac{M}{N}} \sin \tilde{z} = \pm \frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{h^2}} \sin \tilde{z}.$$

Проверяем на устойчивость стационарные решения. Не разделяя между собой три значения θ_{cm} ввиду общих для них дальнейших вычислений, задаем их возмущения в виде

$$\theta_{\epsilon} = \theta_{cm} + \Theta(t), \quad (6)$$

где θ_{ϵ} – возмущенное значение величины θ_{cm} , $\Theta(t)$ – возмущение угла ориентации директора. Далее записываем линеаризованное уравнение для возмущений

$$\frac{d\Theta}{dt} = \lambda \Theta, \quad (7)$$

где

$$\lambda = \left. \frac{\partial F}{\partial a} \right|_{cm} = M - Na_{cm}^2.$$

Решением (7) является функция

$$\Theta(\tilde{t}) = C \exp(\lambda \tilde{t}), \quad (8)$$

где C – постоянная интегрирования, представляющая собой начальное возмущение. Проверяем на устойчивость a_{cm1} . Имеем

$$\lambda = M - Na_{cm1}^2 = M.$$

Тогда

$$\Theta(\tilde{t}) = C \exp(M \tilde{t}). \quad (9)$$

Величина M является управляющим параметром, зависящим от величины безразмерного магнитного поля h (см. (5)). Действительно, если $h^2 - 1 < 0$ и, следовательно, $h^2 < 1$, то $M < 0$ и $\Theta(\tilde{t})$ уменьшается с течением времени, поэтому состояние $\theta_{cm1} = 0$ является устойчивым. Если $h^2 > 1$, то $M > 0$ и $\Theta(\tilde{t})$ увеличивается с течением времени, поэтому состояние $\theta_{cm1} = 0$ становится неустойчивым.

Проверяем на устойчивость $a_{cm2,3}$. Имеем

$$\lambda = M - Na_{cm2,3}^2 = -2M,$$

а (8) в виде

$$\Theta(\tilde{t}) = C \exp(-2M \tilde{t}). \quad (10)$$

В этом случае, если $h^2 < 1$, то $M < 0$ и $\Theta(\tilde{t})$ увеличивается с течением времени, следовательно, состояние $\theta_{cm2,3} = \pm \frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{h^2}} \sin \tilde{z}$ является неустойчивым. Если $h^2 > 1$, то $M > 0$ и $\Theta(\tilde{t})$ уменьшается с течением времени, следовательно, состояние $\theta_{cm2,3}$ является устойчивым.

Таким образом, проверка на устойчивость стационарных решений (5) показывает, что нулевое значение угла устойчиво при $h^2 < 1$, а ненулевое значение угла неустойчиво, т. е. при $h^2 < 1$ если угол не ноль, то он будет стремиться к нулю. Наоборот, при $h^2 > 1$ нулевое значение является неустойчивым и поэтому будет изменяться к ненулевому значению, которое устойчиво. Этих значений два, симметричных относительно нуля. Это

связано с тем, что для нематика с $\chi_a > 0$, при $\vec{n} \perp \vec{H}$ директор может повернуться на угол $\pm\theta$ к оси \vec{H} в силу эквивалентности направлений \vec{n} и $-\vec{n}$. В эксперименте это проявляется в появлении доменной стенки, разделяющей области с различной ориентацией директора [4].

Существует критическое значение величины безразмерного магнитного поля $h^2 = h_c^2 = 1$, при котором $M = 0$, а θ_{cm1} становится стационарным решением с нейтральной устойчивостью, поскольку функция (9) является начальным возмущением C , не меняющимся с течением времени [3]. Кроме того, $\theta_{cm2,3} = 0$ при $h^2 = h_c^2$. Следовательно, величина h_c^2 является точкой бифуркации типа вилки [2]. Бифуркационная диаграмма изображена на рис. 2.

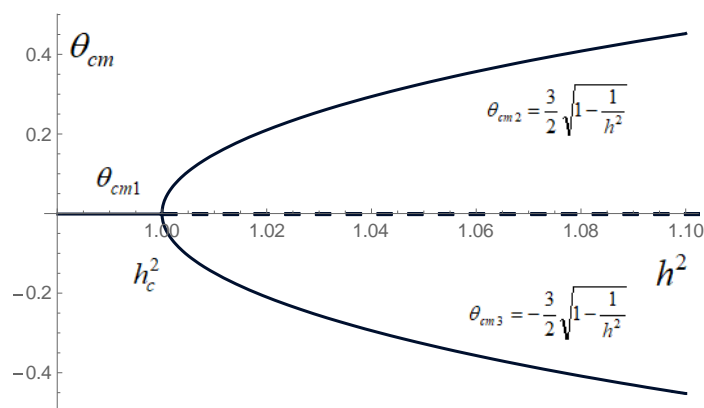


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма для ПФ в геометрии деформации кручения.

Пунктирной линией обозначено неустойчивое состояние $\theta_{cm1} = 0$

Fig. 2. Bifurcation diagram of the Freedericksz transition at the twist distortion geometry.

The dashed line indicates the unstable state $\theta_{cm1} = 0$

Деформация кручения нематика в магнитном поле произвольной ориентации по отношению к директору

В данном разделе рассмотрим переориентацию нематика (с $\chi_a > 0$, толщиной d и жестким креплением на границах) в магнитном поле произвольной ориентации по отношению к первоначальному направлению директора (см. рис. 3).

Запишем уравнение движения директора в безразмерном виде:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{z}^2} + \frac{1}{2} h^2 \sin 2\alpha, \quad (11)$$

где α – угол между векторами \vec{n} и \vec{H} . Из рис. 3 видно, что

$$\alpha = \delta - \theta = \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) - \theta = \frac{\pi}{2} - (\theta + \beta). \quad (12)$$

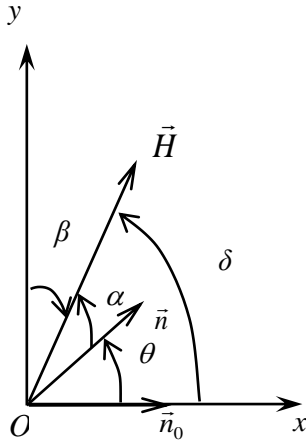


Рис. 3. Геометрия задачи. β – угол отклонения вектора \vec{H} от положения, соответствующего ПФ ($\beta = 0$)

Fig. 3. Geometry of the problem. β is the deviation angle of vector \vec{H} from the position corresponding to the Freedericksz transition ($\beta = 0$)

С учетом (12) имеем:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{z}^2} + \frac{1}{2} h^2 \sin 2(\theta + \beta). \quad (13)$$

Угол θ отклонения директора от положения равновесия считаем малыми. Разложим $\sin 2(\theta + \beta)$ в ряд по θ до третьего порядка включительно

$$\sin 2(\theta + \beta) \approx \sin 2\beta + 2 \cos 2\beta \theta - 2 \sin 2\beta \cdot \theta^2 - \frac{4}{3} \cos 2\beta \theta^3$$

При малом β последние два слагаемых имеют одинаковый порядок малости – третий. Этим обстоятельством диктуется учет третьего порядка в разложении. Тогда (11) будет иметь вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{z}^2} + \frac{1}{2} h^2 \sin 2\beta + h^2 \cos 2\beta \theta - h^2 \sin 2\beta \cdot \theta^2 - \frac{2}{3} h^2 \cos 2\beta \theta^3. \quad (14)$$

Преобразуем (14) к ЭУ. Как и в первой части, считаем, что распределение $\theta(\tilde{z}, \tilde{t})$ имеет вид (3). Подставляя (3) в (14) и интегрируя по $d\tilde{z}$ в пределах от 0 до π , получаем ЭУ

$$\frac{da}{d\tilde{t}} = -R_1 a^3 - R_2 a^2 + R_3 a + R_2 = F, \quad (15)$$

где

$$R_1 = \frac{4}{9} h^2 \cos 2\beta; \quad R_2 = \frac{\pi}{4} h^2 \sin 2\beta; \quad R_3 = h^2 \cos 2\beta - 1.$$

Стационарные решения (15), следующие из условия (*), находятся из кубического уравнения

$$R_1 a_{cm}^3 + R_2 a_{cm}^2 - R_3 a_{cm} - R_2 = 0. \quad (16)$$

Для проверки их на устойчивость можно повторить процедуру, задаваемую (6)–(8). Но, решая численно (16) для различных углов β , можно сразу получить окончательный результат. Он представлен на рис. 4. Здесь графики иллюстрируют поведение стационарных решений в зависимости от управляющего параметра h , для угла β , равного

$\frac{\pi}{18}$ рад (кривые 1, 2, 3) и $\frac{\pi}{360}$ рад (кривые 4, 5, 6).

Как видно из рисунка, наличие угла β в (13) уничтожает бифуркацию типа вилки (ср. с рис. 2). Оказывается, что кривые 1 и 4 определены для всех значений $h \geq 0$. Кривые же 2, 3 определены лишь при $h \geq \hat{h}_2$, а кривые 5, 6 – при $h \geq \hat{h}_1$, и все они имеют особенность типа предельной точки при значениях \hat{h}_2 и \hat{h}_1 , соответственно [6]. При $h < \hat{h}$ имеются лишь устойчивые решения (кривые 1, 4), а при $h > \hat{h}$ имеет место бистабильность (кривые 2, 3 и 5, 6). Для рассматриваемой геометрии имеется единственное состояние $a_{cm} = 0$, реализующееся при $h = 0$. Это точка, в которой возникает ориентационная неустойчивость [5]. Рисунок показывает, что при уменьшении β кривая устойчивых решений (4) и одна из кривых бистабильности (6) стремятся к слиянию в точке $h = 1$. Очевидно, что при $\beta = 0$ происходит восстановление бифуркации типа вилки.

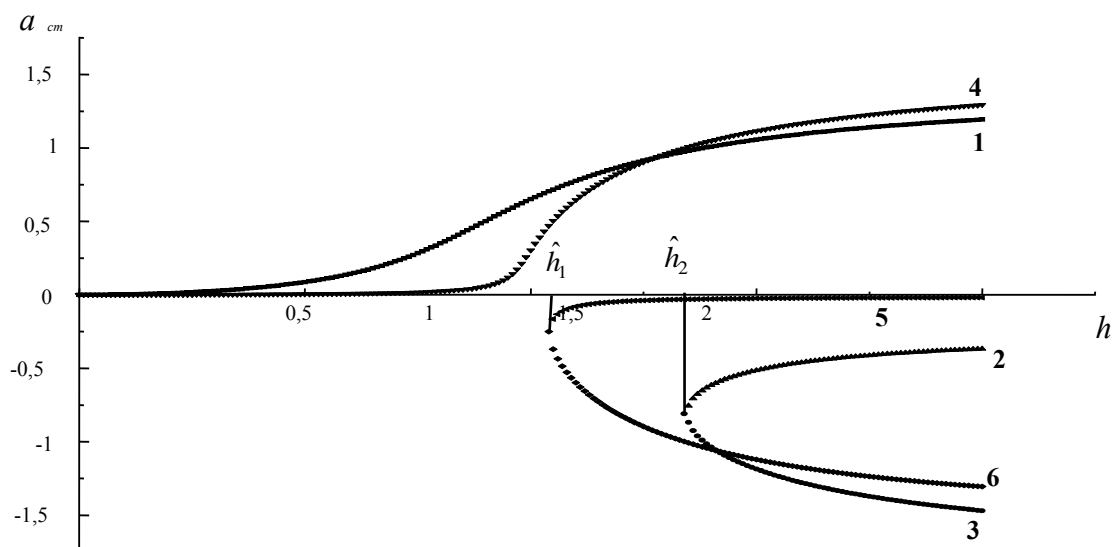


Рис. 4. Графическое представление численного решения (16) для $\beta = \frac{\pi}{18}$ рад и $\beta = \frac{\pi}{360}$ рад. Кривая 1 и 4 соответствуют устойчивому стационарному состоянию, кривые 2, 3 и 5, 6 – бистабильному стационарному состоянию

Fig. 4. A graphical representation of the numerical solution (16) for $\beta = \frac{\pi}{18}$ rad and $\beta = \frac{\pi}{360}$ rad. Curves 1 and 4 correspond to a stable stationary state, curves 2, 3, and 5, 6 correspond to a bistable stationary state

Представленные результаты, полученные методом ЛАУ, дополняют те, что получены при исследовании переориентации нематиков стандартными методами континуальной теории (существование критического поля Фредерикса и его исчезновение при наклонной ориентации нематика на границах). Это касается, прежде всего, бифуркации типа вилки при ПФ и ее разрушения при наличии угла «сбивки» β между директором и магнитным полем. Надо иметь в виду, что бифуркация не имеет места при любом, сколь угодно малом, но отличном от нуля значении β . Угол β можно считать управляющим параметром, наряду с h , разрушающим бифуркацию ($\beta \neq 0$) и восстанавливающим ее ($\beta = 0$). При этом в первом случае переориентация нематика происходит при сколь угодно малом значении h , отличном от нуля, во втором появляется критическое поле Фредерикса. Кроме того, в стационарных решениях (16) имеет место бистабильность.

Выводы

Таким образом, ЛАУ может быть использован как самостоятельный и достаточно простой метод исследования диссипативных процессов в

нематических жидких кристаллах.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.

Список литературы / References

1. Баблюянтц А. Молекулы, динамика и жизнь. Введение в самоорганизацию материи. М. : Мир, 1990. 375 с. [Babloyantz A. Molecules, dynamics and life. An introduction to self-organization of matter. New York: Wiley-Interscience Publication, 1986, 345 p.].
2. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистическом подходе к турбулентности. М. : Мир, 1991. 368 с. [Berge P., Pomeau Y., Vidal C. L'ordre Dans Le Chaos. Vers une approche deterministe de la turbulence. Paris : Hermann, Éditeurs des sciences et des arts, 1988, 352 p.].
3. Шаповалов В. И. Основы теории упорядочения и самоорганизации. М. : Фирма «Испо-Сервис», 2005. 296 с. [Shapovalov V. I. Osnovy teorii uporyadochenija i samoorganizacii (Fundamentals of the theory of self-organization and streamlining). Moscow : Firm «Ispo-Service», 2005, 296 p. (in Russ.)].
4. де Жен П. Физика жидких кристаллов. М. : Мир, 1977. 400 с. [de Gennes P.G. The Physics of Liquid Crystals. Oxford University Press, 1974, 333 p.].

-
-
5. Пикин С. А. Структурные превращения в жидких кристаллах. М. : Наука, 1981. 336 с. [Pikin S.A. Structural transformations in liquid crystals. Moscow : Nauka, 1981, 336 p. (in Russ.)].
6. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного. М. : Мир, 1990. 344 с. [Exploring Complexity. An introduction. New York : W.H. Freeman and Company, 1989].
- Поступила 31.03.2020 г.
Received 31.03.2020
Принята 08.06.2020 г.
Accepted 08.06.2020*