

**Научная статья**  
УДК 532.783

**УЧЕТ ИНЕРЦИОННОГО ЧЛЕНА В УРАВНЕНИИ НАВЬЕ-СТОКСА В МОДЕЛИ  
МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ДОМЕНОВ ДЛЯ НЕМАТИКА С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ  
АНИЗОТРОПИЕЙ ДИАМАГНИТНОЙ ВОСПРИИМЧИВОСТИ**

Андрей Владиславович Голованов\*

*Институт элементоорганических соединений им. А. Н. Несмеянова РАН, Москва, Россия*

---

**ИНФОРМАЦИЯ**

**История статьи:**

Поступила 25.03.2022

Одобрена 20.04.2022

Принята 25.04.2022

---

**Ключевые слова:**

нематический мезоген,  
магнитогидродинамические  
домены,  
уравнение Навье-Стокса,  
инерционный член,  
число Эриксона,  
число Рейнольдса

**АННОТАЦИЯ**

---

Рассмотрена модель магнитогидродинамических доменов, описывающая движение нематической жидкости с отрицательной анизотропией диамагнитной восприимчивости в геометрии деформации кручения. В уравнении Навье-Стокса модели учтен инерционный член. Это позволило ввести в модель три безразмерных параметра – отношения чисел Эриксона к числу Рейнольдса, которые не зависят от характерных величин изучаемой задачи, а определяются только параметрами среды.

---

**DOI:**

10.18083/LCApp1.2022.2.64

---

**Для цитирования:**

Голованов А. В. Учет инерционного члена в уравнении Навье–Стокса в модели магнитогидродинамических доменов для нематика с отрицательной анизотропией диамагнитной восприимчивости // *Жидк. крист. и их практич. использ.* 2022. Т. 22, № 2. С. 64–70.

---

\*Адрес для переписки: [gav@ineos.ac.ru](mailto:gav@ineos.ac.ru)

© Голованов А. В., 2022

---

**Research Article**

**INERTIAL TERM ACCOUNTING IN NAVIER-STOKES EQUATION  
OF MAGNETOHYDRODYNAMIC DOMAINS MODEL FOR A NEMATIC  
WITH NEGATIVE ANISOTROPY OF DIAMAGNETIC SUSCEPTIBILITY**

Andrey V. Golovanov\*

*Institute of Organoelement Compounds of RAS, Moscow, Russia*

---

**ARTICLE INFO:**

**Article history:**

Received 25 March 2022

Approved 20 April 2022

Accepted 25 April 2022

---

**Key words:**

nematic,  
magnetohydrodynamic  
domains,  
Navier-Stokes equation,  
inertial term,  
Eriksen number,  
Reynolds number

---

**ABSTRACT**

A model of magnetohydrodynamic domains describing the motion of nematic fluid with negative anisotropy of diamagnetic susceptibility in the geometry of torsion deformation is considered. In the Navier-Stokes equation of the model, we account an inertial term. This made it possible to introduce three dimensionless parameters into the model, namely the ratio of the Eriksen numbers to the Reynolds number have been committed. These parameters do not depend on the characteristic values of the problem under study, but determined only by parameters of the medium.

---

**DOI:**

**10.18083/LCAppl.2022.2.64**

---

**For citation:**

Golovanov A.V. Inertial term accounting in Navier-Stokes equation of magnetohydrodynamic domains model for a nematic with negative anisotropy of diamagnetic susceptibility. *Liq. Cryst. and their Appl.*, 2022, **22** (2), 64–70 (in Russ.).

---

\*Corresponding author: gav@ineos.ac.ru

© Golovanov A. V., 2022

## Введение

Жидкие кристаллы известны уже более 100 лет. Их классифицируют как термотропные – сложные органические соединения, состоящие из молекул анизометрической формы, мезофазы которых возникают при плавлении, и лиотропные (органические, неорганические и минеральные), образующие мезофазы при растворении. Структурными элементами последних являются не молекулы, а анизометрические конгломераты молекул (мицеллы). При определенной концентрации они образуют упорядоченные жидкокристаллические структуры, на которые влияют электрические и магнитные поля, а также течение.

К настоящему времени теоретически и экспериментально изучен процесс зарождения и развития магнитогидродинамических (МГД) доменов двух видов, возникающих в термотропных и лиотропных нематиках при скачкообразном приложении к ним магнитного поля выше порога Фредерикса: полосатых (первого и второго рода) и паркетных. Полосатые домены первого рода являются линиями вихря, лежащими в плоскости слоя нематика [1]. Домены второго рода – это линии вихря, расположенные перпендикулярно плоскости слоя нематика [2]. Паркетные домены – линии вихря, расположенные в плоскости слоя нематика под углом друг к другу в виде паркета [3, 4]. Появление доменной структуры происходит за порогом гидродинамической неустойчивости [5]. Нахождение порога неустойчивости (критического магнитного поля доменообразования) требует совместного решения уравнений Навье-Стокса (НС) и движения директора [6], записанных в линейном приближении. При решении этой задачи в моделях [1–3] инерционным членом  $\rho \frac{\partial v}{\partial t}$  в уравнении НС пренебрегают ввиду его малости по сравнению с другими слагаемыми.

Целью данной работы является рассмотрение модели МГД доменов второго рода с учетом инерционного члена в уравнении НС и сравнения с результатом, полученным в [2].

## Эксперимент

*Модель доменной структуры с учетом инерционного члена*

Эксперименты показывают, что при резком включении магнитного поля величиной больше критического поля Фредерикса  $H_F$  для деформации кручения, в слое лиотропного нематика (коллоидный раствор органического красителя дисульфоиодантрона в воде) с отрицательной анизотропией диамагнитной восприимчивости ( $\chi_a < 0$ ) через некоторое время появляется периодическая структура [7]. Визуально она определяется как совокупность темных и светлых полос – доменов, перпендикулярных направлению магнитного поля (рис. 1). В [2] решена задача о возникновении доменной структуры в планарном слое нематика с  $\chi_a < 0$  и конечной энергией сцепления  $W_s$  на границах при деформации кручения.

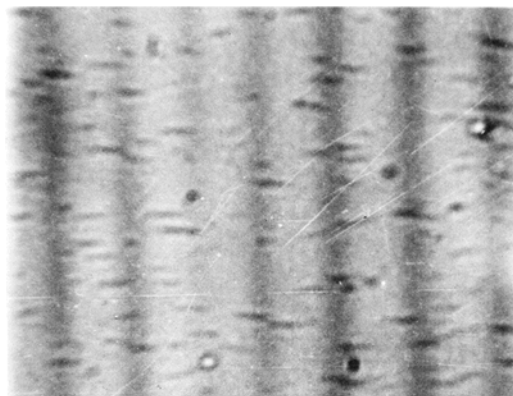


Рис. 1. Фото магнитогидродинамических доменов в лиотропной нематической фазе системы дисульфоиодантрон – вода

Fig. 1. Magnetohydrodynamic domains in lyotropic nematic phase of disulfoindanthrone – water system

На рисунке 2 представлена геометрия задачи. Вектор  $\vec{n}_0$  невозмущенной ориентации нематика направлен вдоль оси  $x$  декартовой системы координат, ось  $z$  перпендикулярна плоскости слоя, начало координат выбрано в центре слоя толщиной  $d$ . Вектор напряженности магнитного поля  $\vec{H}$ , в связи с тем, что  $\chi_a < 0$ , сонаправлен директору  $\vec{n}_0$ . Поворот директора на угол  $\theta$  происходит в плоскости слоя.

Для описания доменной структуры периодической вдоль оси  $x$  в модели рассматриваются малые возмущения директора и вектора скорости течения нематика

$$\vec{n} \equiv (1, \theta(x, z), 0); \quad \vec{v} \equiv (0, v_y(x, z), 0).$$

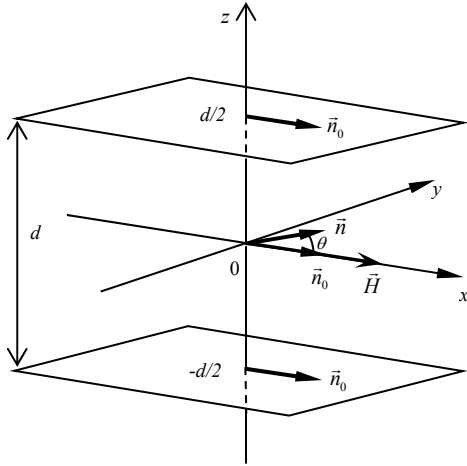


Рис. 2. Геометрия задачи

Fig. 2. Geometry of the problem

Как сказано выше, в модели инерционным членом в уравнении НС пренебрегают. Запишем уравнение НС, учитывая инерционный член. Тогда система уравнений в линейном приближении, описывающая движение нематика, имеет вид:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial t} = \eta_2 \frac{\partial^3 v_y}{\partial x^3} + \frac{1}{2} \alpha_4 \frac{\partial^3 v_y}{\partial x \partial z^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right), \\ \gamma_1 \frac{\partial \theta}{\partial t} = |\chi_a| H^2 \theta + K_3 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + K_2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \alpha_2 \frac{\partial v_y}{\partial x} \end{cases}, \quad (1)$$

где  $\rho$  – плотность нематика,  $\eta_2 = \frac{1}{2}(\alpha_4 + \alpha_5 - \alpha_2)$ ,

$\gamma_1 = \alpha_3 - \alpha_2$  – вращательная вязкость,  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  – коэффициенты вязкости Лесли,  $K_2$  и  $K_3$  – константы упругости. Граничные условия для скорости

$$v_y \Big|_{z=\pm \frac{d}{2}} = 0.$$

В модели исследуется вопрос о влиянии энергии сцепления  $W_s$  на процесс доменообразования. Поскольку для цели данной работы это несущественно, будем считать, что директор жестко закреплен на границах –  $W_s \rightarrow \infty$ . Тогда граничные условия для директора следующие:

$$\theta \Big|_{z=\pm \frac{d}{2}} = 0.$$

Для дальнейшего анализа запишем (1) в безразмерном виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} \right) = \mu_1 \frac{\partial^3 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^3} + \frac{1}{2} \mu_2 \frac{\partial^3 \tilde{v}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{z}^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{t}} \right), \\ \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{t}} = h^2 \theta + K \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{z}^2} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} \end{cases}, \quad (2)$$

где  $\tilde{x} = \frac{\pi}{d} x$  и  $\tilde{z} = \frac{\pi}{d} z$  – безразмерные координаты,

$\tilde{t} = \frac{t}{\tau_0}$  – безразмерное время,  $\tilde{v} = \frac{v_y}{v_0}$  – безразмерная

скорость,  $\mu = \frac{\alpha_2^2}{\rho K_2}$ ,  $\mu_1 = \frac{\gamma_1 \eta_2}{\rho K_2}$ ,  $\mu_2 = \frac{\gamma_1 \alpha_4}{\rho K_2}$ ,  $h = \frac{H}{H_f}$ ,

$K = \frac{K_3}{K_2}$  – безразмерные параметры задачи,

$\tau_0 = \frac{\gamma_1 d^2}{\pi^2 K_2}$  – характерное время задачи,  $v_0 = \frac{\pi K_2}{\alpha_2 d}$  –

характерная скорость задачи,  $H_f = \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{K_2}{|\chi_a|}}$  – кри-

тическое поле Фредерикса для деформации кручения. Безразмерные параметры  $\mu, \mu_1, \mu_2$  являются отношениями чисел Эриксона (Er) к числу Рейнольдса (R) [8]. Граничные условия для безразмерной скорости:

$$\tilde{v} \Big|_{\tilde{z}=\pm \frac{1}{2}} = 0.$$

Решения системы (2) будем искать среди функций периодичных вдоль оси  $x$  с безразмерным волновым вектором  $\tilde{q}_x$

$$\begin{cases} \tilde{v} = \tilde{v}_0 \sin(\tilde{q}_x \tilde{x}) \cos(\tilde{q}_z \tilde{z}) \exp(\tilde{s} \tilde{t}) \\ \theta = \theta_0 \cos(\tilde{q}_x \tilde{x}) \cos(\tilde{q}_z \tilde{z}) \exp(\tilde{s} \tilde{t}) \end{cases}, \quad (3)$$

где  $\tilde{q}_z$  – безразмерный волновой вектор вдоль оси  $z$ ,  $\tilde{s}$  – безразмерное обратное время включения доменной структуры. В [2] было показано, что  $\tilde{q}_z = 1$  для случая  $W_s \rightarrow \infty$ . Поэтому (3) запишется в виде

$$\begin{cases} \tilde{v} = \tilde{v}_0 \sin(\tilde{q}_x \tilde{x}) \cos \tilde{z} \exp(\tilde{s} \tilde{t}) \\ \theta = \theta_0 \cos(\tilde{q}_x \tilde{x}) \cos \tilde{z} \exp(\tilde{s} \tilde{t}) \end{cases}, \quad (4)$$

что удовлетворяет граничным условиям для скорости и директора.

Подставляя (4) в (2), получим дисперсионное соотношение для величины  $\tilde{s}$ :

$$\tilde{s}_{\pm} = \frac{1}{2} \left( Y - AX - \frac{1}{2} \mu_2 - 1 \pm \left[ Y^2 + (2BX + \mu_2 - 2)Y + (A^2 - 4\mu_1 K)X^2 + (C\mu_2 - 2B)X + \frac{1}{4} \mu_2^2 + 1 - \mu_2 \right]^{\frac{1}{2}} \right), \quad (5)$$

где  $Y = h^2$ ,  $X = \tilde{q}_x^2$ ,  $A = (\mu_1 - \mu + K)$ ,  
 $B = (\mu + \mu_1 - K)$ ,  $C = (\mu_1 - \mu - K)$ . Исследуя функ-

цию (5) на экстремум, с целью определения зависимости  $Y$  от  $X$  получим следующее квадратное уравнение:

$$Y^2 + \left( -\frac{2BK}{\mu - K} X + \frac{(BC - A^2)\mu_2}{4\mu_1(\mu - K)} - \frac{1 - \mu}{\mu - K} \right) Y + \frac{(4\mu_1 K - A^2)K}{\mu - K} X^2 + \frac{(2B - \mu_2 C)K}{\mu - K} X + \frac{(C^2 - A^2)\mu_2^2 + 4(A^2 - BC)\mu_2}{16\mu_1(\mu - K)} + 1 = 0 \quad (6)$$

Коэффициенты в (6) можно упростить для анизотропной среды. Например, для термотропных нематиков  $Er/R \sim 10^6 \div 10^4$  [6]. Используем в качестве модельной системы *n*-метоксибензильден-*n*-бутиланилин (МВВА), поскольку для него определены все необходимые материальные константы:  $\rho = 1,088$  г/см<sup>3</sup>,  $K_2 = 4 \cdot 10^{-7}$  дин,  $K_3 = 7,5 \cdot 10^{-7}$  дин,  $\alpha_2 = -77,5$  сП,  $\alpha_4 = 83$  сП,  $\gamma_1 = 77$  сП и  $\eta_2 = 103$  сП [9]. Имеем:  $\mu = 1,38 \cdot 10^6$ ,  $\mu_1 = 1,82 \cdot 10^6$ ,  $\mu_2 = 1,47 \cdot 10^6$ ,  $K = 1,875$ . Как видно,  $\mu_i \gg K$ . Следовательно, в (6) можно пренебречь: величиной  $K$  по сравнению с величиной  $\mu$  в знаменателях коэффициентов при  $Y$ ,

$X^2$ ,  $X$  и свободном члене; в коэффициенте при  $Y$  третьим слагаемым по сравнению со вторым; в коэффициентах при  $X^2$  и  $X$  первыми слагаемыми в числителе. Также пренебрегаем единицей. Тогда (6) преобразуется к виду:

$$Y^2 + \left( -\frac{2(\mu + \mu_1)K}{\mu} X + \frac{(\mu_1 - \mu)\mu_2}{2\mu_1} \right) Y - \frac{(\mu_1 - \mu)^2 K}{\mu} X^2 - \frac{(\mu_1 - \mu)\mu_2 K}{\mu} X - \frac{(\mu_1 - \mu)\mu_2^2 K + 2(\mu_1 - \mu)\mu\mu_2}{4\mu\mu_1} = 0 \quad (7)$$

Решением (7) является выражение:

$$Y = \frac{(\mu + \mu_1)K}{\mu} X - \frac{(\mu_1 - \mu)\mu_2}{4\mu_1} + \left[ \frac{(\mu_1 - \mu)^2 K}{\mu} X^2 + \frac{(\mu_1 - \mu)^2 \mu_2 K}{2\mu\mu_1} X + \frac{\mu_2(\mu_1 - \mu)[(\mu_1 - \mu)\mu\mu_2 + 4\mu_1(2\mu + \mu_2 K)]}{16\mu\mu_1^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

Как видно, поведение функции (8) определяют пять коэффициентов, являющихся отношениями различных комбинаций четырех величин ( $\mu$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  и  $K$ ). Аппроксимация этой функцией экспериментальных данных  $\tilde{q}_x^2(h^2)$ , позволяет записать только переопределенную систему нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ) относительно величин  $\mu$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  и  $K$ .

Для нахождения системы уравнений, в которой количество неизвестных равно количеству уравнений, поступим следующим образом. Разложим радикал в (8) в ряд, учитывая третий порядок в разложении. Тогда

$$Y \approx -\delta X^3 + \gamma X^2 + \beta X + \alpha, \quad (9)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  – коэффициенты в разложении. В итоге получаем СНАУ относительно неизвестных  $\mu$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  и  $K$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = -\frac{(\mu_1 - \mu)\mu_2}{4\mu_1} + \sqrt{\frac{(\mu_1 - \mu)^2\mu_2^2}{16\mu_1^2} + \frac{(\mu_1 - \mu)K\mu_2^2}{4\mu_1} + \frac{(\mu_1 - \mu)\mu_2}{2\mu_1}}, \\ \beta = \frac{2\mu_1 K}{\mu}, \\ \gamma = \frac{\beta(\mu_1 - \mu)\mu^2 - 2\mu_1(\mu_1 - \mu)K^2}{\mu^2\mu_2}, \\ \delta = -\frac{2\beta^2(\mu\mu_1 - \mu_1^2) + 8\beta^3}{\mu_1\mu_2^2}. \end{array} \right. \quad (10)$$

Решая систему (10), находим, что

$$\begin{aligned} K &= \frac{\beta^2 - 4\gamma(a-1)}{2\beta}; \quad \mu = \frac{\beta^2\gamma - 4(a-1)\gamma^2}{2\delta(a-1)}; \\ \mu_1 &= \frac{\beta^2\gamma}{2\delta(a-1)}; \quad \mu_2 = \frac{2\beta\gamma}{\delta}. \end{aligned} \quad (11)$$

Проверку правильности полученных соотношений проведем, используя значения величин модельной системы МВВА. Численно решая (6) и разлагая в ряд полученное решение, находим

$$Y \approx -9,93 \cdot 10^{-6} X^3 + 1,47 X^2 + 4,93 X + 2,31.$$

Проделав ту же процедуру для (7), получаем

$$Y \approx -9,93 \cdot 10^{-6} X^3 + 1,47 X^2 + 4,93 X + 1,99. \quad (12)$$

Как видно, сведение (6) к (7) существенно на результат не влияет. Подставляя коэффициенты из (12) в (11), получаем:

$K = 1,875$ ;  $\mu = 1,38 \cdot 10^6$ ;  $\mu_1 = 1,81 \cdot 10^6$ ;  $\mu_2 = 1,46 \cdot 10^6$ .  
 Значения полученных величин совпадают со значениями, представленными выше.

Итак, можно заключить, что учет инерционного члена в уравнении НС вводит в модель МГД доменов отношения чисел Эриксона к числу Рейнольдса. Это позволяет экспериментально находить отношения этих чисел при наблюдении процесса доменообразования в нематиках различной природы.

*Результаты для модели без учета инерционного члена*

В модели МГД доменов, представленной в [2], получены следующие результаты для случая, когда  $W_s \rightarrow \infty$ . Дисперсионное соотношение для величины  $\tilde{s}$  и функция  $\tilde{q}_x^2(h^2)$  имеют вид, соответственно:

$$\tilde{s} = \frac{(h^2 - K\tilde{q}_x^2 - 1)(1 + \eta\tilde{q}_x^2)}{1 + (\eta - \alpha)\tilde{q}_x^2},$$

$$h^2 = \frac{K\eta(\eta - \alpha)}{\alpha}(\tilde{q}_x^2) + 2\frac{K\eta}{\alpha}\tilde{q}_x^2 + \left(1 + \frac{K}{\alpha}\right).$$

Из последней формулы следует, что обработка с помощью нее результатов эксперимента  $\tilde{q}_x^2(h^2)$  позволяет получить лишь отношения констант вязкости  $\eta = \frac{\eta_2}{\frac{1}{2}\alpha_4}$ ,  $\alpha = \frac{\alpha_2^2}{\frac{1}{2}\alpha_4\gamma_1}$  и упругости  $K = \frac{K_3}{K_2}$ , а

также  $\frac{\eta}{\alpha} = \frac{\gamma_1\eta_2}{\alpha_2^2}$ .

## Выводы

Таким образом, проведенное исследование позволяет сделать следующий вывод. Пренебрежение инерционным членом в уравнении НС в рассмотренной модели МГД доменов делает ее менее информативной. Действительно, соотношение этой модели с экспериментом приводит только к определению отношений констант вязкости и упругости для нематика. Учет же инерционного члена вводит в модель отношения чисел Эриксона к числу Рейнольдса. Получение величин этих чисел в эксперименте по наблюдению за МГД доменами, в свою очередь, позволяет оценивать относительную роль упругих и вязких сил в нематиках различной природы.

**Благодарность:** Работа выполнена в рамках Государственного задания № 075-00697-22-00 Министерства науки и высшего образования РФ.

**Acknowledgments:** This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Contract / agreement No. 075-00697-22-00).

#### Список источников / References

1. Guyon E., Meyer R., Salan J. Domain structure in the nematic Freederiksz transition. *Mol. Cryst. Liq. Cryst.*, 1979, **54**, 261–273.
2. Kaznacheev A.V. Influence of the anchoring energy on the threshold characteristics of magneto-hydrodynamic domains in nematics. *Mol. Mater.*, 1993, **2**, 283–293.
3. Hurd A.J., Fraden S., Lonberg F., Meyer R.B. Field-induced transient periodic structures in nematic liquid crystals: the splay Frederiks transition. *J. Phys. France*, 1985, **46**(6), 905–917.
4. Fraden S., Hurd A., Meyer R., Cahoon M., Caspar D.L.D. Magnetic-field-induced alignment and instabilities in ordered colloids of tobacco mosaic virus. *J. Phys. Colloque C3*, 1985, **46**, 85–112.
5. Берже П., Помо И., Видадь К. Порядок в хаосе. О детерминистическом подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991. 368 с. [Berge P., Pomeau Y., Vidal C. L'orderedansle chaos. Versune approche deterministe de la turbulence. Paris: Hermann, Editeurs des sciences et des arts, 1988, 352 p.].
6. Пикин С. А. Структурные превращения в жидких кристаллах. М. : Наука, 1981. 336 с. [Pikin S.A. Structural transformations in liquid crystals. Moscow : Nauka, 1981, 336 p. (in Russ.)].
7. Golovanov A., Kaznacheev A., Sonin A. Viscoelastic properties of a lyotropic chromonic nematic. *Mol. Mat.*, 1993, **3**, 147–155.
8. Leslie F.M. Theory of phenomena in liquid crystals. *Advances in liquid crystals*. New York : Acad. Press, 1979, **4**, 82 p.
9. Блинов Л. М. Электро- и магнитооптика жидких кристаллов. М. : Наука, 1978. 384 с. [Blinov L.M. Electro- and magnetooptics of liquid crystals. M. : Nauka, 1978, 384 p. (in Russ.)].

**Голованов А. В.** – <https://orcid.org/0000-0002-5029-8488>.

Поступила 25.03.2022, одобрена 20.04.2022, принята 25.04.2022  
Received 25.03.2022, approved 20.04.2022, accepted 25.04.2022