

УДК 532.6

П. А. Дорофеева, А. Г. Калугин

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПОЛЯ ВЕКТОРА ОРИЕНТАЦИИ В КАПЛЕ НЕМАТИЧЕСКОГО ЖИДКОГО КРИСТАЛЛА

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет, Ленинские горы, д. 1, 119991 Москва, Россия.
E-mail: kalugin@mech.math.msu.su

В работе изучается задача о нахождении поля вектора ориентации в сферической капле нематического кристалла, окруженной изотропной средой. Рассматривается модель, учитывающая дивергентные слагаемые в энергии упругости ориентации Франка при слабом сцеплении директора на границе капли. Исследуются линеаризованные относительно однородного состояния уравнения равновесия для поля директора. Показано, что точные решения для малых отклонений директора от однородного состояния при планарном и гомеотропном граничных условиях могут как по величине, так и качественно отличаться от аналогичных, полученных ранее для модели без учета дивергентных слагаемых, что может быть использовано для определения значения дивергентной константы Франка.

Ключевые слова: дивергентная константа, капля нематического жидкого кристалла, граничные условия.

DOI: 10.18083/LCAppl.2017.3.59

P. A. Dorofeeva, A. G. Kalugin

ABOUT ORIENTATION VECTOR FIELD DISTRIBUTION IN NEMATIC LIQUID CRYSTAL DROPLET

Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskiye Gory, Moscow, 119991, Russia. E-mail: kalugin@mech.math.msu.su

The problem of the distribution of director field in a spherical droplet of a nematic liquid crystal enclosed an isotropic media is considered. We take into account the Frank energy with splay-bend term and weak anchoring conditions at the boundary of the nematic droplet. Equilibrium equations for the director field linearized with respect to the homogeneous state are studied. Solutions for small deviations are received. It is shown that the solutions can both in value and quality differ from similar ones in case when splay-bend term is omitted and it is possible to use this for splay-bend constant retrieving.

Key words: nematic liquid crystal droplet, surface elastic constant, splay-bend constant, boundary conditions.

Введение

Задача о равновесном состоянии капли нематического жидкого кристалла может рассматриваться с точки зрения нескольких подходов. Возможно изучение структуры поля директора и видов дефектов на основании геометрических или топологических методов [1–3]. Другой вид задач – изучение распределения ориентации и формы капли в зависимости от свойств внутренней и поверхностной энергии [4–6]. В работах [7–9] по некоторым характеристикам поля директора в капле определялась величина коэффициента K_{24} при дивергентном слагаемом в энергии Франка.

В настоящей работе рассматривается задача о нахождении поля ориентации в сферической капле в случае слабого сцепления директора на границе с учетом дивергентного слагаемого в энергии Франка.

Постановка задачи

Задача о равновесии капли, окруженной изотропной средой, может быть сведена к поиску минимума для функционала вида

$$\int_V F_V d\tau + \int_\Sigma F_S d\sigma \quad (1)$$

с учетом заданного объема капли [4]. Для свободной энергии F_V внутри объема рассмотрим энергию Франка в одноконстантном приближении с учетом дивергентного слагаемого в виде [10, 11]

$$2F_V = K \nabla_i n^j \nabla^i n_j + K_{24} (\nabla_i n_j \cdot \nabla^j n^i - (\nabla_k n^k)^2) \quad (2)$$

Для поверхностной энергии F_S используем модель Рапини – Папулара [4, 10, 12]

$$2F_S = 2\gamma + W(1 - (\vec{n}, \vec{m})^2) = 2\gamma + W(1 - (\sin \Omega \sqrt{1 - n_v^2} + \cos \Omega |n_v|)^2),$$

где γ и W – постоянные коэффициенты, вектор \vec{m} – ось легкого ориентирования, которая в общем случае может свободно вращаться по конусу с заданным углом Ω между образующей и нормалью к поверхности, $\Omega \in [0, \pi/2]$, \vec{v} – внешняя для капли единичная нормаль к поверхности раздела сред.

Пусть R – характерный линейный размер капли, тогда, используя физические параметры, задающие модель, можно ввести два безразмерных числа, определяющих задачу $\varepsilon_1 = W/\gamma$ и $\varepsilon_2 = WR/K$, и использовать их для упрощения уравнений.

Рассмотрим случай, когда $\varepsilon_1 \ll 1$ и $\varepsilon_2 \ll 1$. Будем искать решения для директора в виде малых отклонений в меридиональной плоскости от однородного поля вида $\vec{n} = \text{const}$, направленного вдоль полярной оси капли. В этом случае для линейаризованных уравнений задача о нахождении \vec{n} отделяется от задачи о форме капли [4], поэтому в дальнейшем будем считать ее сферой радиуса R . Тогда в сферических координатах r, θ, φ единичный директор можно записать в виде $\vec{n} = (\cos \chi, \sin \chi / r, 0)$. Рассмотрим функцию $u = \theta + \chi(r, \theta)$ – угол между полярной осью и директором. Для однородной ориентации $u = 0$. Введем безразмерные переменные $x = r/R, y = \pi/2 - \theta, w(x, y) = u/\varepsilon_1$, которые при этом будут величинами единичного порядка. Если в этом случае учесть в функционале (1) слагаемые по $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ не выше второго порядка, то после его варьирования для функции $w(x, y)$ получается уравнение [4]

$$(x^2 w_x)_x + \frac{(w_y \cos y)_y}{\cos y} - \frac{w}{\cos^2 y} = 0, \quad (3)$$

которое в силу свойств симметрии задачи достаточно решать в области $0 < x < 1, 0 < y < \pi/2$ с граничными условиями

$$w_x(1, y) - \lambda w = 0,5 \sin 2(y + \Omega), \\ w(x, 0) = w(x, \pi/2) = 0,$$

где $\lambda = K_{24}/K$, а нижний индекс означает частную производную по соответствующей переменной.

Рассмотрим наиболее распространенные случаи ориентации директора на границе – планарную и гомеотропную, которым отвечают значения $\Omega = \pi/2$ и $\Omega = 0$ соответственно. Для таких граничных условий существуют точные решения уравнения (3), имеющие вид, аналогичный случаю, когда слагаемые с коэффициентом K_{24} в (1) не учитываются [4]

$$w = \mp \frac{x^2 \sin 2y}{2(2 - \lambda)}, \quad (4)$$

при этом в решении (4) верхний знак отвечает планарной ориентации, нижний – гомеотропной. На рисунке показано полученное распределение поля директора в капле при двух значениях λ для планарной и гомеотропной ориентации на границе в меридиональном сечении. В силу свойств симметрии задачи рисунок приведен для области $0 < \theta < \pi/2, r < R$.

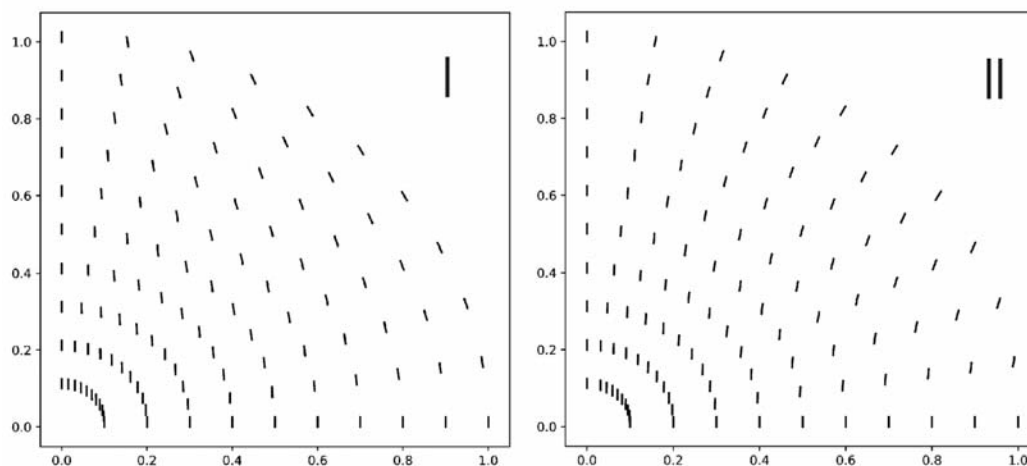


Рис. Распределение ориентации в капле:

I – при $\Omega = \pi/2$, $\lambda = 1,5$ и $\Omega = 0$, $\lambda = 2,5$; II – при $\Omega = 0$, $\lambda = 1,5$ и $\Omega = \pi/2$, $\lambda = 2,5$ соответственно

Fig. Director field distribution in droplet:

I – for $\Omega = \pi/2$, $\lambda = 1,5$ and $\Omega = 0$, $\lambda = 2,5$; II – for $\Omega = 0$, $\lambda = 1,5$ and $\Omega = \pi/2$, $\lambda = 2,5$ respectively

Из соотношения (4) следует, что для модели, учитывающей дивергентные слагаемые в энергии Франка, при $K_{24} < 0$ отклонение директора на границе будет того же знака, но меньше по величине, чем в случае, когда $K_{24} = 0$, при $0 < K_{24} < 2K$ оно возрастает по величине, но направление сохраняется, а при $K_{24} > 2K$ происходит перестройка решения, когда планарной ориентации на границе будет соответствовать гомеотропное решение при $K_{24} = 0$ и наоборот. Полученное решение, например, может быть использовано для оценки величины или знака K_{24} . Отметим, что по распределению директора в капле можно сделать оценку знака коэффициента K_{24} , в отличие от плоского слоя, где для одноконстантного приближения аналогичные неравенства получаются только для его абсолютной величины [12, 13]. Кроме того, по наличию или отсутствию смены направления отклонения и по ее величине можно оценить значение дивергентной константы, которая в настоящее время теоретически и экспериментально определена с большим разбросом значений [8, 9, 14–16].

Выводы

В работе рассмотрена задача о распределении поля директора в сферической капле нематика, окруженной изотропной средой, когда на границе

жидкокристаллической среды рассматривается модель слабого сцепления. В случае когда поле директора ищется в виде малых отклонений от однородного состояния, изучены точные решения для планарной и гомеотропной ориентации директора на границе. Исследован вопрос о влиянии дивергентного слагаемого в энергии Франка на вид поля вектора ориентации в капле. Показано, что учет этого слагаемого может приводить как к большим, так и меньшим отклонениям директора вблизи границы, чем в случае, когда дивергентным слагаемым пренебрегают, и в зависимости от величины коэффициента K_{24} угол отклонения может быть любого знака.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 15-01-00361.

Список литературы / References

1. Курик М. В., Лаврентович О. Д. Дефекты в жидких кристаллах : гомотопическая теория и экспериментальные исследования // *УФН*. 1988. Т. 154, № 3. С. 381–431. [Kurik M.V., Lavrentovich O.D. Defects in liquid crystals: homotopy theory and experimental studies. *Sov. Phys. Usp.*, 1988, **31**, 196–224.] DOI: 10.1070/PU1988v031n03ABEH005710.
2. Прищепа О. О., Шабанов А. В., Зырянов В. Я. Многообразие ориентационных структур в каплях нематических жидких кристаллов и их оптические текстуры // *Журнал СВУ. Сер. «Математика и*

- физика». 2010. Т. 3, № 3. С. 395–406. [Prishchepa O.O., Shabanov A.V., Zyryanov V.Ya. Variety of Orientational Structures in the Nematic Liquid Crystal Droplets and their Optical Textures. *J. of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, 2010, **3** (3). 395–406 (in Russ.)].
3. Гардымова А. П. Ориентационные структуры капель хирального нематика в полимерной матрице // *Жидк. крист. и их практич. использ.* 2015. Т. 15, № 1. С. 73–80. [Gardymova A.P. Orientation Structures of the Chiral Nematic Droplets in a Polymer Matrix. *Zhidk. krist. ikh prakt. ispol'z. = Liq. Cryst. and their Appl.*, 2015, **15** (1), 73–80 (in Russ.)].
 4. Калугин А. Г., Голубятников А. Н. О равновесной форме капли нематического жидкого кристалла // *Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова РАН*. Москва : Наука, 1998. Т. 223. С. 171–177. [Kalugin A.G., Golubyatnikov A.N. Equilibrium Shape of a Nematic Liquid-Crystal Droplet, *Proc. of the Steklov Institute of Mathematics*, 1998, **223**, 168–174].
 5. Казначеев А. В., Богданов М. М., Сонин А. С. Влияние энергии сцепления на вытянутую форму тактоидов в лиотропных неорганических жидких кристаллах // *ЖЭТФ*. 2003. Т. 124, № 6. С. 1298–1307. [Kaznacheev A.V., Bogdanov M.M., Sonin A.S. The influence of anchoring energy on the prolate shape of tactoids in lyotropic inorganic liquid crystals. *JETP*, 2003, **97** (6), 1159–1167. DOI: 10.1134/1.1641899].
 6. Prinsen P., van der Schoot P. Shape and director-field transformation of tactoids. *Phys. Rev. E*, 2003, **68**, 021701-1–11. DOI: 10.1103/PhysRevE.68.021701.
 7. Zumer S., Kralj S., Bezic J. Freedericksz Transitions in Nematic and Cholesteric Liquid Crystal Droplets: Determination of K_{24} Elastic Constant. *Mol. Cryst. and Liq. Cryst. Science and Technology. Sect. A.*, 1992, **212** (1), 163–172. DOI: 10.1080/10587259208037256.
 8. Zumer S., Kralj S. Influence of K_{24} on the structure of nematic liquid crystal droplets. *Liquid Crystals*, 1992, **12** (4), 613–624. DOI: 10.1080/02678299208029097.
 9. Sparavigna A., Lavrentovich O.D., Strigazzi A. Magnetic field effect on periodic stripe domains in nematic liquid crystals, *Phys. Rev. E*, 1995, **51** (1), 792–796. DOI: 10.1103/PhysRevE.51.792.
 10. Сонин А. С. Введение в физику жидких кристаллов. М. : Наука, 1983. 319 с. [Sonin A.S. Introduction into the physic of liquid crystals. Moscow : Nauka, 1983, 319 p. (in Russ.)].
 11. Rapini A., Papoular M. Distorsion d'une lamelle nematique sous champ magnertique conditions d'ancrage aux parois, *J. Phys. Colloq. (Paris)*, 1969, **30** (C4), C4-54–C4-56. DOI: 10.1051/jphyscol:1969413.
 12. Калугин А. Г. О равновесии слоя нематического жидкого кристалла с неоднородной границей // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 2015, Т. 50, № 2. С. 3–7. [Kalugin A.G. On the equilibrium of the layer of a nematic liquid crystal with an inhomogeneous boundary, *Fluid Dynamics*, 2015, **50** (2), 181–185. DOI: 10.1134/S0015462815020015].
 13. Калугин А. Г. Об ориентационной неустойчивости слоя лиотропного нематического жидкого кристалла // *Вестн. МГУ. Сер. I: Математика. Механика*. 2016. № 2. С. 57–59. [Kalugin A.G. Orientational instability of a lyotropic nematic liquid crystal layer, *Moscow University Mechanics Bulletin*, 2016, **71** (2), 39–41. DOI: 10.3103/S0027133016020035].
 14. Polak R.D., Crawford G.P., Kostival B.C., Doane J.W., Zumer S. Optical determination of the saddle-splay elastic constant K_{24} in nematic liquid crystals, *Phys. Rev. E*, 1994, **49**, R978–R981. DOI: 10.1103/PhysRevE.49.R978.
 15. Калугин А. Г., Павлов Д. В. О периодических решениях в слое нематического жидкого кристалла // *Жидк. крист. и их практич. использ.* 2017. Т. 17, № 2. С. 62–66. [Kalugin A.G, Pavlov D.V. On periodical solutions in nematic liquid crystal layer. *Zhidk. krist. ikh prakt. ispol'z. = Liq. Cryst. and their Appl.*, 2017, **17** (2), 62–66. DOI: 10.18083/LCAppl.2017.2.62].
 16. Fumeron S., Moraes F., Pereira E. Retrieving the saddle-splay elastic constant K_{24} of nematic liquid crystals from an algebraic approach. *Eur. Phys. J. E*, 2016, **39**, 83–98. DOI: 10.1140/epje/i2016-16083-8.

Поступила в редакцию 17.08.2017 г.
Received 17 August 2017