Жидкие кристаллы и их практическое использование. 2013. Вып. 1 (43). С. 49—54
≈≈≈

УДК 532.6

А. Г. Калугин

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ В НЕМАТИЧЕСКИХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛАХ В ПРИБЛИЖЕНИИ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ЭРИКСЕНА

SURFACE WAVES IN THE NEMATIC LIQUID CRYSTALS AT THE APPROXIMATION OF LARGE ERICKSEN NUMBERS

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет, кафедра гидромеханики,
119991 Москва, Ленинские горы, д. 1. E-mail: kalugin@mech.math.msu.su

Изучена задача о распространении гармонических волн малой амплитуды вдоль поверхности несжимаемого нематического жидкого кристалла. Исследован случай больших чисел Эриксена, когда упругостью ориентации можно пренебречь по сравнению с вязкими силами. В таком приближении при планарной и гомеотропной начальных ориентациях директора возможно аналитическое решение задачи. При этом в случае линеаризованных уравнений эволюция директора полностью определяется движением среды, которая, в свою очередь, описывается как вязкая анизотропная жидкость. В случае изотропного поверхностного натяжения и идеальной невесомой неинерционной внешней среды получено решение для поверхностных волн, выведено дисперсионное соотношение, исследована зависимость круговой частоты и коэффициента затухания от волнового числа и коэффициентов вязкости Лесли.
Ключевые слова: *поверхностные волны, нематические жидкие кристаллы, дисперсионное соотношение.*

The problem of propagation of small amplitude harmonic waves along the surface of incompressible nematic liquid crystal is considered. The approximation of large Ericksen number is studied when the orientation of director is determined by viscous forces and it is possible to neglect the orientation elasticity. Solutions in the case of planar and homeotropic initial director orientation for this model are received. The dispersion relation for these solutions is also studied and diagrams for real and imaginary parts of frequency as a function of wave number were built numerically.
Key words: *surface waves, nematic liquid crystals, dispersion ratio.*

Изучение проблемы распространения поверхностных волн в вязкой жидкости ведется уже длительное время [1]. В отличие от идеальной жидкости движение вязкой среды не является потенциальным, и даже в случае, когда рассматривается линеаризованная задача, алгебраическое выражение для частоты как явной функции волнового числа отсутствует, сама же частота становится комплексной. В монографии [2] рассматривалась задача о распространении поверхностных волн в случае нелинейного поверхностного натяжения. В работе [3] изучались капиллярные волны и их применение для экспериментального определения параметров среды в случае анизотропного поверхностного натяжения в каплях магнитной жидкости. В работах [4, 5] были рассмотрены температурные флуктуации на свободной поверхности нематического жидкого кристалла (НЖК) с изотропным поверхностным натяжением при наличии магнитного поля. В работах [6, 7] была рассмотрена задача о распространении поверхностных волн для модели нематиков в приближении Франка-Озеена и идеальной невесомой и неинерционной внешней среды, в этом случае линеаризованные уравнения движения и эволюции директора разделяются и существует аналитическое решение. Однако в полученном дисперсионном при такой постановке соотношении невозможно выделить зависимость частоты от волнового числа в явном виде. В работе [8] были изучены поверхностные волны на границе раздела НЖК-тяжелая вязкая изотропная жидкость и при помощи параметрического подхода исследовано дисперсионное соотношение. Исследование дисперсионного соотношения, а также оценки, сделанные в [4], показали, что в ряде задач основную роль в движении жидкокристаллической среды играют вязкие силы, при этом упругостью ориентации можно пренебречь. Настоящая работа посвящена изучению поверхностных волн в этом случае.

Модель нематических жидких кристаллов

Рассмотрим модель НЖК согласно [9, 10]. Будем рассматривать несжимаемую среду, в этом случае закон сохранения массы сводится к уравнению

$$\nabla^i v_i = 0, \tag{1}$$

где v_i – компоненты вектора скорости. Анизотропные свойства среды описываются единичным вектором $\vec{n}$ (директором), задающем среднее направление ориентации длинных осей молекул или структурных единиц частицы среды. Наличие такого дополнительного параметра приводит к появлению анизотропной части свободной энергии – энергии Франка

$$F_V = \frac{1}{2} K \nabla_i n^j \nabla^i n_j, \tag{2}$$

где без ограничения общности использовано одноконстантное приближение. Выпишем уравнения движения такой среды в предложенном Лесли виде [10]:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} + \nabla_i (p - U) + \nabla_j \left(\frac{\partial F_V}{\partial \nabla_j n^k} \nabla_i n_k \right) = \nabla_j \tau_i^j, \tag{3}$$

$$(\delta_j^i - n^i n_j)\left(\nabla_k \left(\frac{\partial F_V}{\partial \nabla_k n_j} \right) - \gamma_1 N^j - \gamma_2 e^{jk} n_k\right) = 0, \tag{4}$$

$$\tau^{ij} = \alpha_1 n^i n^j n_k n_l e^{kl} + \alpha_2 n^j N^i + \alpha_3 n^i N^j + \alpha_4 e^{ij} + \alpha_5 n^j n_k e^{ik} + \alpha_6 n^i n_k e^{jk}, \tag{5}$$

$$\vec{N} = \frac{d\vec{n}}{dt} - [\vec{\omega} \times \vec{n}], \tag{6}$$

где $2\vec{\omega} = rot\vec{v}$, U – потенциал силы тяжести, ρ – плотность, e^{ij} – компоненты тензора скоростей деформации, p – давление, α_i – коэффициенты вязкости Лесли, $\gamma_1 = \alpha_3 - \alpha_2$, $\gamma_2 = \alpha_6 - \alpha_5 = \alpha_2 + \alpha_3$. Уравнение эволюции директора (4) спроектировано на направление, перпендикулярное $\vec{n}$, что позволяет исключить неопределенный множитель Лагранжа, возникающий в общем случае из условия $|\vec{n}| \equiv 1$, при этом из трех соотношений независимыми являются только два.

Для системы уравнений (1)—(6) можно ввести несколько безразмерных чисел, позволяющих оценивать вклад сил различной природы и упрощать модель. В частности, можно рассмотреть два параметра: число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \rho L V / \alpha$ и число Эриксена $E = \alpha V L / K$ [9], где L, V и α – характерные значения длины, скорости и коэффициентов вязкости Лесли соответственно. Также можно рассматривать отношение этих чисел $\mu = \mathrm{Re}/E = \rho K/\alpha^2$, которое не зависит от характерных величин изучаемой задачи, а определяется только параметрами среды. Для типичных нематиков $\mu \approx 10^{-4}$ [10]. В настоящей работе предполагается рассмотреть случай больших чисел Эриксена $E >> 1$, когда силами упругости ориентации можно пренебречь. Таким образом, в уравнениях (3) и (4) можно опустить слагаемые, содержащие производные от энергии Франка F_V. При этом в случае, когда $\gamma_2/\gamma_1 = \pm 1$, уравнение (4) сводится к условию вмороженности контравариантных или ковариантных компонент единичного вектора $\vec{n}$ [11].

Постановка задачи о поверхностных волнах

Рассмотрим задачу о распространении гармонических волн малой амплитуды по поверхности нематической среды бесконечной глубины с учетом силы тяжести. Пусть декартова система координат выбрана так, что ось z противонаправлена вектору силы тяжести, а ось x – вдоль волнового вектора $\vec{k}$. В начальном невозмущенном состоянии неподвижная нематическая фаза занимает полупространство $z < 0$, поле директора однородно, $\vec{n}_0 = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$. Внешнюю среду будем считать идеальной, невесомой, неинерционной. Положим, что $\vec{v}$, ζ, $\vec{n} - \vec{n}_0$ малы, индекс 0 относится к невозмущенному начальному состоянию. В этом случае линеаризованные около начального состояния уравнения (4) и (5) примут вид

$$\gamma_1 N^i = \gamma_2 (n_0{}^i n_{0j} - \delta^i_j) e^{jk} n_{0k},$$

$$\tau^{ij} = \alpha_1 n_0{}^i n_0{}^j n_{0k} n_{0l} e^{kl} + \alpha_2 n_0{}^j N^i + \alpha_3 n_0{}^i N^j + \alpha_4 e^{ij} + \alpha_5 n_0{}^j n_{0k} e^{ik} + \alpha_6 n_0{}^i n_{0k} e^{jk}.$$

Таким образом, тензор вязких напряжений зависит только от компонент тензора скоростей деформации и начальной ориентации директора, поэтому уравнения (1), (3) отделяются от уравнений (4). Будем искать решение систем (1), (3) в виде

$$v_i = \mathrm{Re}(u_i(z)E), \qquad p - U = \mathrm{Re}(q(z)E), \qquad E = \exp(i(\omega t - kx))$$

с формой свободной поверхности $\varsigma = \mathrm{Re}(QE)$, при этом ω и Q – комплексные числа. Исключая $p - U$ и v_1 из линеаризованных соотношений (1), (3), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для u_2 и u_3:

$$A_4 u_3^{(IV)} + A_3 u_3''' + A_2 u_3'' + A_1 u_3' + A_0 u_3 = C_3 u_2''' + C_2 u_2'' + C_1 u_2' + C_0 u_2, \tag{7}$$

$$C_3 u_3''' + C_2 u_3'' + C_1 u_3' + C_0 u_3 = B_2 u_2'' + B_1 u_2' + B_0 u_2, \tag{8}$$

где A_i, B_i, C_i – рациональные выражения от ω, α_i и k. Полученная система седьмого порядка не имеет алгебраического решения в общем случае, однако его можно найти для некоторых специальных начальных ориентаций директора.

Аналитическое решение

Анализ коэффициентов уравнений (7), (8) показывает, что для некоторых ориентаций $\vec{n}_0$ эта система сильно упрощается и можно выписать ее аналитические решения. В частности, $C_i \equiv 0$ для гомеотропной начальной ориентации, а также в случае $\vec{n}_0 = (1,0,0)$ и $\vec{n}_0 = (0,1,0)$. Для $\vec{n}_0 = (1,0,0)$ и гомеотропной ориентации (7), (8) сводится к виду [4]

$$\alpha u_3^{(IV)} - (\beta k^2 + i\omega\rho) u_3'' + u_3 k^2 (\alpha k^2 + i\omega\rho) = 0, \tag{9}$$

$$\alpha_4 u_2'' - 2u_2(\alpha k^2 + i\omega\rho) = 0, \tag{10}$$

где $4\alpha = 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 - \gamma_2(\alpha_2 + \alpha_3)/\gamma_1$, $2\beta = 2\alpha_1 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \gamma_2(\alpha_2 + \alpha_3)/\gamma_1$. Для начальной ориентации $\vec{n}_0 = (0{,}1{,}0)$ уравнения (7), (8) с точностью до обозначения коэффициентов вязкости совпадают с соответствующими уравнениями для изотропной жидкости [1]. В результате решения для v_2, v_3 получаются из уравнений (9), (10) или их изотропных аналогов, v_1 и p – из линеаризованных уравнений (1) и (3), и все они представляют собой суммы функций вида $c_i \exp(k_i z + i(\omega t - kx))$, где c_i – произвольные константы, k_i – корни соответствующих характеристических уравнений.

Граничные условия сводятся к условиям на свободной поверхности, которые в линеаризованной задаче берутся при $z = 0$, и к условию затухания возмущений при $z \to \infty$. В силу последнего требования в решениях остается только половина слагаемых, для которых $\mathrm{Re}\, k_i > 0$. При этом поверхностное натяжение будем считать изотропным, поскольку даже в случае статических задач вклад анизотропных слагаемых достаточно мал [12]. Тогда граничные условия во всех рассматриваемых случаях аналогичны условиям для изотропной среды и сводятся к кинематическому для вертикальной компоненты скорости $v_3 = \zeta'_t$ и динамическим для касательных и нормальной компонент вектора поверхностных сил [1, 11] вида:

$$\lambda e^{33} - p + U = -\rho g \varsigma + \gamma \varsigma''_{xx}, \qquad \tau^{13} = 0, \qquad \tau^{23} = 0,$$

где γ – коэффициент изотропного поверхностного натяжения, λ – линейная комбинация коэффициентов вязкости, зависящая от начальной ориентации директора. Из условия $\tau^{23} = 0$ следует, что $v_2 \equiv 0$ для всех случаев. Таким образом, в решениях для остальных компонент скорости v_i, давления $p - U$ и отклонения свободной поверхности ς остаются три константы, удовлетворяющих системе линейных уравнений, получаемых из граничных условий. Требование существования нетривиального решения такой системы приводит к ее вырожденности, что позволяет выписать дисперсионное соотношение. Для начальных ориентаций директора, приводящих к уравнению (9), несмотря на то что и в уравнениях движения, и в граничных условиях стоят разные комбинации коэффициентов вязкости, соотношения, связывающее частоту ω и волновое число k, как и характеристическое уравнение (9), совпадают и принимают вид, аналогичный дисперсионному соотношению для капиллярных волн [4],

$$(k_1 k_2 - k^2)(\rho\omega^2 + i\omega k^2(\alpha - \delta)) = \tag{11}$$

$$= k^2(k_1 + k_2)(\rho g + \gamma k^2) + i\alpha\omega(k_1^2 k_2^2 + k_1^2 k^2 + k_2^2 k^2 + k_1 k_2 k^2),$$

где k_1, k_2 – корни характеристического уравнения для (10) с положительной действительной частью, $\delta = \alpha_1 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$. Укажем также дисперсионное соотношение для «изотропного» случая [1]

$$\rho\omega^2 = k(\rho g + \gamma k^2) + \alpha_4 k^2 (2i\omega + (1 - l)\alpha_4 k^2 / \rho), \tag{12}$$

где $l = \sqrt{1 + \dfrac{2i\omega\rho}{\alpha_4 k^2}}$, при этом действительная часть l также положительна.

Исследование дисперсионного соотношения

В работе [13] для изотропной вязкой жидкости был предложен параметрический подход, когда k, а также действительная и мнимая части ω выражались как алгебраические функции от действительной части l. Такой подход был применен в [8] для изучения поверхностных волн в НЖК для модели Франка-Озеена. В случае изучаемого приближения применение такой методики возможно только для «изотропной» ориентации. Рассмотрим асимптотическое приближение, считая, что число Рейнольдса мало $\mathrm{Re} = |\omega| \rho / (\alpha_4 k^2) \to 0$, что хорошо выполняется для коротких поверхностных волн или при больших значениях коэффициентов вязкости, характерных, например, для лиотропных НЖК [14]. В первом приближении для изотропного случая $l \approx 1 + i\omega\rho / (\alpha_4 k^2)$ и дисперсионное соотношение принимает вид $\omega = i(\rho g + \gamma k^2)/(\alpha_4 k^2)$ [7]. При этом ω – чисто мнимое, что соответствует режиму непериодических затуханий возмущенной поверхности, который возможен в вязких жидкостях [8, 13]. Периодические колебания с затухающей амплитудой можно получить, рассматривая квадратичное разложение l по числу Рейнольдса, тогда, например, дисперсионное соотношения в изотропном случае можно записать в виде $3\rho\omega = i\alpha_4 k^2 \pm \sqrt{6k(g + \gamma k^2)\rho^2 - \alpha_4^2 k^4}$, аналогичным образом можно выписать асимптотическое разложение, соответствующее характеристическому уравнению (9). На рисунках 1 и 2 представлены графики зависимости круговой частоты и коэффициента затухания для соотношений (11), (12), построенные с использованием приближения второго порядка. Кривые *A* и *C* соответствуют случаю начальной ориентации директора $\vec{n}_0 = (0,1,0)$, *B* и *D* – $\vec{n}_0 = (1,0,0)$ и $\vec{n}_0 = (0,0,1)$. В качестве примера нематической среды рассматривается МББА, при этом значения коэффициентов вязкости для кривых *A* и *B* взяты при температуре *T* = 20 °C, а для *C* и *D* – при *T* = 30 °C [15]. Диапазон значений k выбран таким образом, что на рис. 1 для кривых *B*, *D* представлены оба волновых режима, а для *A* и *C* – только периодический, в этих случаях переход к чистому затуханию происходит при критических значениях k бóльших на порядок. Наличие роста k при уменьшении коэффициента вязкости согласуется с оценкой для капиллярных волн в изотропной вязкой жидкости, сделанной в работе [13]. По аналогии можно предположить, что уменьшение значения k при переходе от «изотропного» случая к гомеотропной начальной ориентации также вызвано ростом эффективных коэффициентов вязкости в уравнениях движения (3).

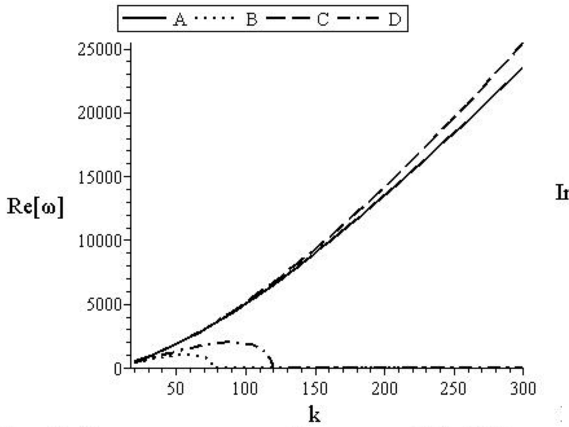

Рис. 1. Зависимость круговой частоты Re[ω] (1/с) от волнового числа *k* (1/см) для МББА

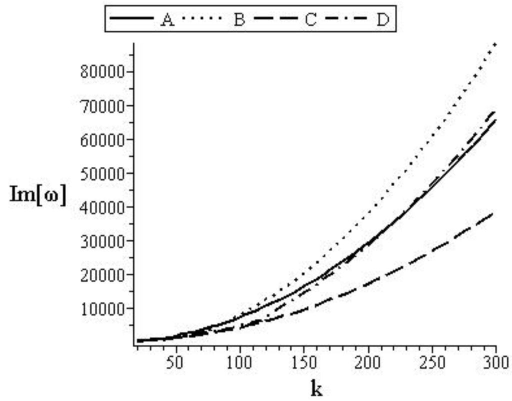

Рис. 2. Зависимость коэффициента затухания Im[ω] (1/с) от волнового числа *k* (1/см) для МББА

Таким образом, использование числа Эриксена для упрощения модели НЖК позволяет получить явную связь между частотой колебания для гравитационных поверхностных волн, волновым числом и коэффициентами вязкости Лесли или их комбинацией.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 11-01-00188.

Список использованной литературы

1. *Lamb H.* A treatise on the mathematical theory of the motion of fluids. London : The University press, 1879. 258 с.
2. *Левич В. Г.* Физико-химическая гидродинамика. М. : Изд. АН СССР, 1952. 539 с.
3. *Голубятников А. Н., Субханкулов Г. И.* // Магнитная гидродинамика. 1986. Вып. 1. С. 73—78.
4. *Langevin D., Bouchiat M.A.* // J. Phys. France. 1972. Vol. 33, № 1. P. 101—111.
5. *Langevin D.* // J. Phys. France. 1972. Vol. 33, № 2/3. P. 249—256.
6. *Голубятников А. Н., Калугин А. Г.* // Вестн. Московского ун-та. Сер. 1 : Математика. Механика. 2001. № 1. С. 42—43.
7. *Golubiatnikov A. N., Kalugin A. G.* // Mol. Cryst. Liq. Cryst. 2001. Vol. 366. P. 2731—2736.
8. *Igosheva M. A., Kalugin A. G.* // Mol. Cryst. Liq. Cryst. 2010. Vol. 526. P. 10—17.
9. Де Жен П. Физика жидких кристаллов. М. : Мир, 1977. 400 с.
10. *Leslie F. M.* // Advances in liquid crystals. Academic Press, New York, 1979. Vol. 4. P. 1— 82.
11. *Галин Г. Я., Голубятников А. Н., Каменярж Я. А. и др.* Механика сплошных сред в задачах. М. : Московский лицей, 1996. Т. 1. 396 с.
12. *Калугин А. Г., Голубятников А. Н.* // Тр. Матем. ин-та РАН. 1998. Т. 223. С. 171—177.
13. *Антонюк П. Н.* // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286, № 6. С. 1324—1328.
14. *Golovanov A. V., Kaznacheev A. V., Sonin A. S.* // Mol. Mat. 1993. Vol. 3. P. 147—155.
15. *Беляев В. В.* Вязкость нематических жидких кристаллов. М. : Физматлит, 2002. 222 с.

Поступила в редакцию 17.12.2012 г.