УДК 538.931

А. А. Сонин

К ИСТОРИИ ИССЛЕДОВАНИЯ ЯВЛЕНИЯ ПЕРКОЛЯЦИИ

Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), кафедра физики, ул. Б. Семеновская, 38, 107023 Москва, Россия. E-mail: soninaa@mami.ru

Статья посвящена истории исследований универсального явления— перколяции. Приводятся примеры проявления перколляции в различных природных и социальных процессах. Значительное внимание уделено работам по перколяции, выполненным известным французским физиком, Нобелевским лауреатом П.-Ж. де Женом.

Ключевые слова: перколяция, порог перколяции, ячейка Хеле-Шоу, фрактальная размерность.

DOI: 10.18083/LCAppl.2016.1.97

A. A. Sonin

TO THE HISTORY OF THE RESEARCH ON PERCOLATION PHENOMENON

Moscow State University of Mechanical Engineering (MAMI), department «Physics», 38 B. Semenovskaya St., Moscow, 107023, Russia. E-mail: soninaa@mami.ru

This article is dedicated to the history of studies of the universal phenomenon of percolation. The examples of percolation in different natural and social processes are given. Considerable attention is paid to the works on percolation by the famous French physicist, Nobel Prize Laureate, P.-G. de Gennnes.

Key words: percolation, percolation threshold, Hele-Shaw cell, fractal dimension.

[©] Сонин А. А., 2016

Введение

Термин «перколяция» происходит от латинского *percolatio* — процеживание, просачивание, протекание. В физическом смысле слово «перколяция» означает протекание (просачивание) одной фазы сквозь другую, например прохождение жидкости или газа через пористый фильтр. Это весьма универсальное явление, часто встречающееся в природе и в различных социальных процессах (см., например, [1–4]).

Ниже (в хронологическом порядке) будут рассмотрены основные работы, посвященные теории и анализу некоторых проявлений перколяции.

1. Ранние работы

Отдельные частные случаи перколяции рассматривались достаточно давно. Считается, что первым, кто обсуждал это явление, был американский инженер де Вольсон Вуд. В 1894 г. в ежемесячном американском математическом журнале он поставил следующую задачу [6]: «Равное число белых и черных шаров одинакового размера брошено в прямоугольный ящик. Какова вероятность того, что образуется непрерывная

цепочка из белых шаров от одного конца ящика до другого? Для определенности предположим, что на длине ящика помещается 30 шаров, на ширине – 10, а на высоте – 5 (или 10) их слоев». Фактически здесь рассматривалась модель электрического пробоя среды.

В этом же номере журнала было опубликовано упрощенное и, как теперь известно, далекое от истины решение задачи, предложенное П. Филбриком для случая «линейного» пробоя, когда все белые шары пересекут ящик по прямой линии.

Экспериментально перколяция (хотя этот термин в то время был еще неизвестен) наблюдалась при вытеснении одной жидкости другой жидкой средой (или газом) в специальных ячейках, изобретенных в 1898 г. английским инженером Генри Селби Хеле-Шоу [8].

Обычно представляет интерес вытеснение более вязкой среды менее вязкой. В этом случае на межфазной границе образуются неустойчивости, называемые «вязкими пальцами», так как по форме они напоминают пальцы перчатки. Вязкие пальцы часто имеют фрактальную размерность (см., например, [9]). Вообще фрактальная размерность нередко проявляется при перколяции [2, 9–13].



Де Вольсон Вуд (1832–1897) [5]



Генри Селби Хеле-Шоу (1854–1941) [7]

В экспериментальной практике чаще всего используются ячейки Хеле-Шоу двух типов: тангенциальные и радиальные (рис. 1). В тангенциальных ячейках менее вязкая фаза (например, воздух) закачивается сбоку и процесс вытеснения фазы более вязкой (например, жидкости) происходит параллельно опорным стеклам. менее радиальных ячейках фаза

закачивается через отверстие, проделанное в середине верхнего опорного стекла. Примеры получаемых в описанных ячейках картин вязких пальцев изображены на рис. 2.

Теоретически динамика вязких пальцев (в тангенциальной ячейке Хеле-Шоу) была впервые проанализирована английскими физиками Филипом Саффманом и Джефри Тейлором в 1958 г. [16].

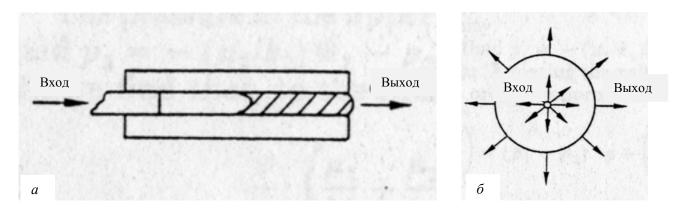


Рис. 1. Виды ячеек Хеле-Шоу: a – тангенциальная; δ – радиальная. Адаптированно из [9]

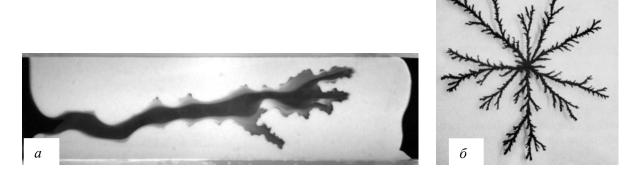


Рис. 2. Вязкие пальцы в тангенциальной (a) и радиальной (δ) ячейках Хеле-Шоу. Адаптировано соответственно из [14] и [15]

2. Исследования Д. Хаммерсли и С. Бродбента

В начале 1950-х гг. английский инженер Саймон Бродбент, сотрудник Британской ассоциации использования угля, занимался разработкой противогазов и респираторов для шахтеров, моделируя процессы прохождения газа или жидкости сквозь пористые угольные фильтры. В частности, его интересовало решение проблемы закупорки фильтров противогазов воздухом, содержащим угольную пыль. Он поднял вопрос о

проницаемости фильтров на конференции по методу Монте Карло в 1954 г. [17]. Известный английский математик Джон Хаммерсли заинтересовался расчетами Бродбента. В дальнейшем (в 1957 г.) им совместно с Бродбентом была выполнена первая работа по детальному математическому описанию явления перколяции [18]. Они ввели в обиход и термин «перколяция». Теории перколяции были посвящены и многие последующие работы Хаммерсли (например, [19]).



Джон Майкл Хаммерсли (1920–2004) [17]

В [18, 19] рассматривалась среда (фильтр) с многочисленными, случайным образом расположенными и соединенными друг с другом каналами (порами). Часть из них (относительная доля p) была «открыта» (т. е. эти поры были достаточно широки для прохождения по ним газа или жидкости), а часть (относительная доля 1 - p) – закрыта (эти поры были слишком узкими и задерживали газ или жидкость). Хаммерсли и Бродбент рассчитали функцию $\theta(p)$ – вероятность того, что газ (жидкость) пройдут через всю среду и образуют в ней газовый (жидкий) кластер макроскопических размеров (наступит так называемый «пробой» среды). Они показали, что при $p < p_{\rm c}$ в среде возможно появление только отдельных микроскопических кластеров, а при $p > p_{\rm c}$ возникает макроскопический кластер, пронизывающий всю среду. Здесь $p_{\rm c}$ - порог перколяции - некоторая критическая доля открытых пор. Для $p > p_{\rm c}$ происходит фазовый переход второго рода (плавная зависимость $\theta(p)$), см. рис. 3.

3. Работы П.-Ж. де Жена

Существенный вклад в теорию перколяции и в особенности в популяризацию этого явления

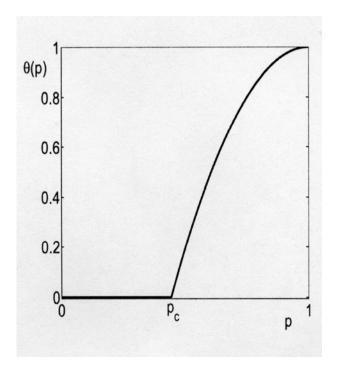


Рис. 3. К определению порога перколяции. Адаптировано из [21])

внес знаменитый французский физик, Нобелевский лауреат Пьер-Жиль де Жен. Этот ученый пришел к рассмотрению проблем, связанных с перколяцией, в 1959 г. независимо от Бродбента и Хаммерсли (не зная еще об их работах). В своей статье [23] де Жен проанализировал две задачи. Первую - о плавном переходе кристалла из состояния диэлектрика в проводник электрического тока, и вторую - об аналогичном переходе кристалла из немагнитной фазы в магнитную. Подход к решению этих двух проблем был идентичен. Рассматривалась кристаллическая решетка, узлах которой В случайным образом располагались атомы двух сортов – A (атомы проводника или магнетика) или B(атомы диэлектрика или немагнитные атомы) с относительными долями p и 1 - p, соответственно. Затем рассчитывалась вероятность $\theta(p)$ того, что атомы сорта А образуют в решетке макроскопический (неограниченных размеров) кластер. При этом материал становился либо проводником, либо магнетиком, претерпевая фазовый переход второго рода.

Ценность этой ранней работы де Жена заключалась в том, что в ней преобладал физический подход к анализу явления перколяции – рассматривались конкретные электрические и магнитные свойства среды. Работы же Хаммерсли

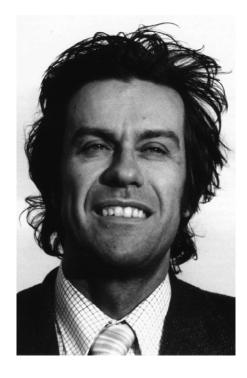
и Бродбента содержали более формальные математические подходы. Известный французский физик Жак Фридель следующим образом оценил ранние опыты де Жена в исследовании перколяции [22]: «Это были первые работы по перколяции, которые выражали не только субъективное мнение».

Впоследствии статья де Жена о перколяции была на время забыта, но в конце 1970-х гг. вновь привлекла внимание научного сообщества и была по достоинству оценена. В это время преколяция стала широко использоваться в физике для объяснения большого круга разнообразных природных явлений. Например, образование гелей, прохождение газа или жидкости сквозь пористую среду, распространение лесных пожаров и т.д., а также — в гуманитарных науках (распространение эпидемий, информации и т. д.).

Примерно через 20 лет после выхода своей первой статьи по перколяции де Жен снова вернулся к этому вопросу, используя универсальный характер перколяции для объяснения различных физических процессов, а также широкого круга других явлений. В своем научнопопулярном обзоре [24], опубликованном во

французском журнале «La Recherche» и высоко оцененным специалистами, он привел много ярких и наглядных иллюстраций проявления перколяции в самых различных областях.

Так де Жен наглядно объяснял понятие порога перколяции на примере системы морских островов. Допустим, что уровень моря постепенно понижается (такое действительно происходит с Балтийским морем). Человек, находящийся вначале на одном из островов, может передвигаться только в его пределах. Затем, когда вода вокруг будет постепенно отступать, он сможет переходить по появившимся участкам суши и на соседние острова. В дальнейшем (с уходом воды) образуется большое число связанных между собой островов (макроскопический кластер). При этом система морских островов превращается в континент с большим количеством озер, по которому человек теперь уже будет перемещаться беспрепятственно, – достигается порог перколяции. Описанная ситуация может быть проиллюстрирована рис. 4, который отражает явление перколяции в общем виде (например, также и уже описанный процесс фильтрации).



Пьер-Жиль де Жен (1932–2007) [22]

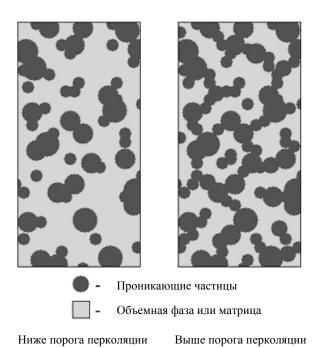


Рис. 4. Схематическое изображение процесса

перколяции. Адаптировано с [25]

Математически явление перколяции (например, протекание в пористой среде) можно моделировать случайными блужданиями, когда какая-

нибудь точка случайным образом перемещается по двумерной сетке. Де Жен сравнивал такой процесс с перемещением муравья в лабиринте (рис. 5).



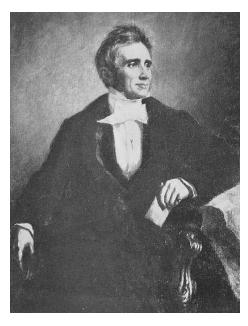
Рис. 5. Иллюстрация перколяции: муравей, блуждающий в лабиринте [26]

В своем обзоре он также проанализировал ряд интересных примеров проявления перколяции в таких областях, как техника, биология, общественные науки. Рассмотрим подробнее три примера. Первый из них касается техники, а два других – общественных наук.

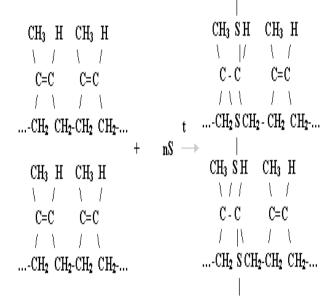
Вулканизация каучука

Уже отмечалось, что перколяция является фазовым переходом второго рода (например, пере-

ходы в магнитных материалах). Еще одним интересным примером перколяционного фазового перехода, упомянутым в обзоре де Жена, является вулканизация каучука. Этот процесс был впервые описан американским изобретателем Чарльзом Гудьиром еще в 1839 г. При нагревании в присутствии серы первоначально мягкий каучук становится жестким и упругим. Жесткая фаза постепенно распространяется внутри мягкой, т. е. происходит перколяция.



Чарльз Нельсон Гудьир (1800–1860) (портрет работы Г. П. А. Хили, Бруклинский музей, Нью-Йорк)



Puc. 6. Химическая реакция, протекающая при вулканизации каучука

Упрочнение материала достигается за счет сшивки молекул полиизопрена (из которых состоит натуральный каучук) цепочками атомов серы в единую пространственную сетку. В результате получается резина (рис. 6). Естественно, что Ч. Гудьир не мог тогда еще рассматривать наблюдаемое им явление как перколяцию.

Распространение эпидемий

Допустим, что мы имеем двух человек, один из которых здоров (человек 3), а другой болен, например, гриппом (человек Γ). Если эти люди встретились, то возможны следующие результаты их контакта:

 $3 + \Gamma \rightarrow 3 + \Gamma$ (здоровый человек не заразился при контакте с больным);

 $3 + \Gamma \to \Gamma + \Gamma$ (здоровый человек заразился).

Второй случай соответствует распространению эпидемии гриппа. Здесь мы имеем дело с однонаправленной перколяцией в направлении Γ .

Обмен информацией

Теперь предположим, что у нас есть два человека, один из которых голосует на выборах за правых (человек Π), а другой — за левых (человек Π). Допустим, они встречаются и каждый из них пытается убедить другого изменить свои политические взгляды. Результаты этой встречи можно схематически выразить следующим образом:

 $\Pi + \Pi \to \Pi + \Pi$ (каждый человек сохраняет свои политические убеждения);

 $\Pi + \Pi \to \Pi + \Pi$ или $\Pi + \Pi \to \Pi + \Pi$ (один из людей меняет свои политические взгляды);

 $\Pi + \Pi \to \Pi + \Pi$ (редкий случай, когда оба человека меняют свои взгляды).

Здесь мы имеем дело с двунаправленной перколяцией, которая может распространяться либо в направлении П, либо в направлении Л.

4. Современные исследования. Работы С. К. Смирнова

Исследования в области перколяции активно продолжаются и в настоящее время. Например, в 2010 г. российскому математику С. К. Смирнову, активно работающему и в этой области, была присуждена престижнейшая Филдсовская премия (см., например, [27]). Он, в частности, строго математически доказал для случая треугольной решетки так называемую формулу Карди [28] (которая дает вероятность пробоя — направленной перколяции — между двумя дугами на плоскости), см. также [6].

5. Универсальность явления перколяции

Выше были описаны лишь отдельные явления, где наблюдается перколяция. Более широкий круг примеров проявления перколяции в природе, естественных и гуманитарных науках и технике собран в таблице.

Области проявления перколяции (адаптировано из [13])

Явление или система	Переход
Случайное возникновение звезд в спиральных галактиках	Нераспространение/распространение
Распространение болезней среди населения	Передача инфекции контактным путем/эпидемии
Коммуникационные цепи или цепи сопротивлений	Несвязанные/связанные
Прыжки на разные расстояния (аморфные полупроводники)	Аналогично цепям сопротивлений
Течение жидкости в пористой среде	Частичное/полное смачивание
Композиционные материалы, проводник – диэлектрик	Диэлектрик/металл
Прерывистые металлические пленки	Диэлектрик/металл
Дисперсия атомов металла в проводниках	Диэлектрик/металл
Композиционные материалы, сверхпроводник – металл	Металл/сверхпроводник
Тонкие пленки гелия на поверхностях	Нормальные/Сверхтекучие
Разбавленные магнитные материалы	Пара-/ферромагнетик
Полимерные гели, вулканизация	Жидкость/гель
Стеклование	Жидкость/стекло
Порог подвижности в аморфных полупроводниках	Локализованные/делокализованные состояния
Кварки в ядерной материи	Локализация/делокализация
Нефтедобыча	Частичное/полное смачивание
Обогащение полезных ископаемых (перколяторы)	Частичное/полное смачивание

Список литературы / References

- Эфрос А. Л. Физика и геометрия беспорядка. Библиотечка «Квант». М.: Наука, 1982. 265 с. [Efros A.L. Physics and geometry of disorder. «Quantum» library. Moscow: Science, 1982, 265 p. (in Russian)].
- 2. Grimmett G. Percolation. 2nd ed. A series of comprehensive studies in mathematics. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1999, **321**, 444 p.
- 3. Kesten H. What is percolation? *Notices of the AMS*, 2006, **53** № (5), 572–573.
- 4. Тарасевич Ю. Ю. Перколяция. Теория, приложения, алгоритмы. М.: Либроком, 2012. 116 с. [Tarasevich Yu.Yu. Percolation. Theory, applications, algorithms. Moscow: Librikom, 2012, 116 р. (in Russian)].
- De Volson Wood (From Wikipedia, the free encyclopedia). URL: Available at: http://en.wikipedia.org/wiki/De_Volson_Wood.
- 6. Wood D.V., Philbrick P.H. Solutions to problems: 5. *American Mathematical Monthly*, 1894, **1** (6), 211–212.
- 7. Institution of Mechanical Engineers. Presidents. URL: Available at: http://www.imeche.org/knowledge/library/archive/institution-and-engineering-history/presidents.
- 8. Hele-Shaw H.S. The flow of water. *Nature*, 1898, **58** (1489), 33–36.
- 9. Sonin A.A. Viscous fingers: from simple amorphous forms to anisotropic fractals. *Rivista del Nuovo Cimento*, 1991, **14** (10), 1–21.
- 10. Mandelbrot B.B. Fractals form, chance and dimension. San Francisco: W.H. Freeman, 1977, 365 p.
- 11. Mandelbrot B.B. The fractal geometry of nature. San Francisco: W.H. Freeman, 1982., 468 р. [Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы: пер. с англ. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.].
- 12. Feder J. Fractals. NY & L: Plenum Press, 1988, 283 р. [Федер Е. Фракталы: пер. с англ. М.: Мир, 1991. 254 с.].
- 13. Gouyet J.-F. Physics and fractal structures. Paris : Ecole Polytechnique, 1995, 247 p.
- 14. Vasil'ev A. From the Hele-Shaw experiment to integrable systems: a historical overview. *Compl. Anal. Oper. Theory.*, 2009, **3** (2), 551–585.

- 15. Daccord G., Nittmann J., Stanley H.E. Radial viscous fingers and DLA: fractal dimension and growth sites. *Phys. Rev. Lett.*, 1986, **56** (4), 336–339.
- 16. Saffman P.-G., Taylor G. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid. *Proc. Royal Soc. London. Ser. A.*, 1958, **245** (281), 312–329.
- 17. Grimmett G., Welsh D. John Michael Hammersley. *Biogr. Mems Fell. R. Soc.*, 2007, **53**, 163–183.
- 18. Broadbent S.R. In discussion of Symposium on Monte Carlo methods. *J. Roy. Stat. Soc. B*, 1954, **16**, 68.
- 19. Broadbent S.R., Hammersley J.M. Percolation processes. I. Crystals and mazes. *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, 1957, **53**, 629–641 and 642–645.
- 20. Hammersley J.M. Percolation processes: lower bounds for the critical probability. *Ann. Math. Statist.*, 1957, **28**, 790–795.
- 21. Pearce C.E.M., Fletcher F.K. Oriented site percolation, phase transitions and probability bounds. *J. Inequal. Pure and Appl. Math.*, 2005, **6** (5), Art. 135, 1–15. Available at: http://www.emis.de/journals/JIPAM/article609.html?sid=609
- 22. Guyon E., Hulin J.-P., Roux S. Macroscopic random media and percolation. *P.G. de Gennes' Impact on Science*. Ed. by J. Bok, J. Prost, F. Brochard-Wyart. Singapore: World Scientific, 2009, **I**: Solid State and Liquid Crystals, 54–72.
- 23. De Gennes P.-G., Lafore P., Millot J.P. Sur un example de propagation dans un milieu désordonné. *J. Phys. Rad.*, 1959, **20**, 624–632.
- 24. De Gennes P.-G. La percolation: un concept unificateur. *La Recherche*, 1976, 7 (72), 919–927.
- 25. Specialty composites. Available at: http://www.tda.com/eMatls/composites.htm.
- 26. de Gennes P.-G. L'enchanteur de la physique. *Pour la science. Les génies de la science*, 2009, 40, 61.
- 27. Kesten H. The work of Stanislav Smirnov. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Hyderabad-2010*. Ed. by R. Bhatia. New Delhi: Hindustan Book Agency, 2010, **1**, 73–87.
- 28. Cardy J.L. Critical percolation in finite geometries. *J. Phys. A.*, 1992, **25** (4), L201–L206.

Поступила в редакцию 15.05.2015 г. Received 15 May, 2015