

УДК 541.182.022:532.135

*Е. А. Кирсанов, Ю. Н. Тимошин*

## **НЕНЬЮТОНОВСКОЕ ТЕЧЕНИЕ СТРУКТУРИРОВАННЫХ СИСТЕМ. VIII. ТЕЧЕНИЕ В ТРУБАХ**

Московский государственный областной социально-гуманитарный институт,  
Коломна, Московская область. E-mail: Kirsanov47@mail.ru

*Для практических целей важно предсказание течения неньютоновских жидкостей в трубах. Современные методы приближенных вычислений позволяют рассчитать величину объемного расхода и зависимость скорости течения от расстояния от стенки цилиндрического канала. Результаты для течения структурированных систем, подчиняющихся обобщенному уравнению течения, сравниваются с расчетом аналогичных параметров при аппроксимации данных с помощью степенного закона.*

**Ключевые слова:** неньютоновские текучие среды, течение в трубах, обобщенное уравнение течения.

*E. A. Kirsanov, Yu. N. Timoshin*

## **NON-NEWTONIAN FLOW OF STRUCTURED SYSTEMS. VIII. FLOW IN PIPES**

Moscow State Region Socio-Humanitarian Institute  
Kolomna, Moscow Oblast. E-mail: Kirsanov47@mail.ru

*For practical purposes, the prediction of non-Newtonian fluids' flow in pipes is important. Modern methods of approximate calculations allow us to calculate the volume flow rate and flow velocity dependence on the distance from the wall of the cylindrical channel. Results for the flow of structured systems obeying a generalized flow equation are compared with the calculation of similar parameters of the data fitting by a power law.*

**Key words:** non-Newtonian fluids, flow in pipes, generalized flow equation.

**Введение**

Известные реологические уравнения получены для случая простого сдвигового течения, где величина напряжения сдвига  $\tau$  одинакова во всех точках вещества. Однако в производстве и транспортировке текучих систем используются каналы с профилем различной формы, где имеется градиент напряжения сдвига. Исходное реологическое уравнение является отправным моментом для расчета профиля скорости и объемного расхода жидкости, движущейся в трубах, как с помощью численного интегрирования, так и при выводе аналитических выражений [1, 2]. Рассмотрим возможность численного расчета характеристик течения в цилиндрических трубах, если неньютоновское течение описывается обобщенным уравнением течения [3].

**1. Методы расчета неньютоновского течения в цилиндрическом канале**

Как для ньютоновской, так и для неньютоновской жидкости расчет течения в цилиндрической трубе основан на уравнениях [1] для напряжения сдвига  $\tau(r)$ , для расчета профиля скорости  $V(r)$ , объемного расхода жидкости  $Q$  за единицу времени:

$$\tau(r) = Pr / 2L, \tag{1}$$

$$V = -\int_R^r \dot{\gamma} dr = -\int_{\tau_R}^{\tau} \frac{R}{\tau_R} \cdot \dot{\gamma} \cdot d\tau, \tag{2}$$

$$Q = \int_0^R 2\pi r V(r) dr. \tag{3}$$

Здесь  $r$  – расстояние от центра трубы до точки измерения напряжения сдвига и скорости,  $R$  – радиус цилиндрической трубы,  $P$  – перепад давления в трубе длиной  $L$ ,  $\tau_R$  – напряжение сдвига на стенке трубы.

Обобщенное уравнение течения (ОУТ) имеет следующий вид

$$\tau^{1/2} = \tau_c^{1/2} / (1 + \chi / \dot{\gamma}^{1/2}) + \eta_c^{1/2} \cdot \dot{\gamma}^{1/2}. \tag{4}$$

Его можно представить в виде, позволяющем провести численный расчет:

$$\dot{\gamma}^{1/2} = \frac{-(\tau_c^{1/2} + \eta_c^{1/2} \chi - \tau^{1/2}) + \sqrt{(\tau_c^{1/2} + \eta_c^{1/2} \chi - \tau^{1/2})^2 + 4\eta_c^{1/2} \chi \tau^{1/2}}}{2\eta_c^{1/2}} \tag{5}$$

Для вычисления интегралов (2) и (3) можно использовать различные методы. Проведенные расчеты для чисто ньютоновского течения показали, что метод трапеций позволяет рассчитывать скорость и расход с точностью до 0,1 % при шаге интегрирования, составляющем 0,01 от радиуса трубы. Результаты расчетов по методу трапеций и методу Симпсона также различаются в пределах 0,1 %, и таким образом для вычисления предлагается использовать метод трапеций как более простой. Соответствующая вычислительная программа может быть реализована в процессоре электронных таблиц Excel. Фрагмент листа Excel представлен на рис. 1.

			r	$\tau$	$\tau^{1/2}$	v	R	Q	Q $\Sigma$	1,03 E-02
		c	0	5,00E+01	7,0710678	0	0,1	0		
$\tau_c$	5,24	5,240194	0,001	4,95E+01	7,0356236	2,49E-01	0,099	1,56E-05		
$\eta_c$	0,36		0,002	4,90E+01	7	4,88E-01	0,098	4,60E-05		
x	0,00054		0,003	4,85E+01	6,9641941	7,18E-01	0,097	9,02E-05		
		2l/p	0,004	4,80E+01	6,9282032	9,38E-01	0,096	1,47E-04		
p	1,00E + 05	2,00E-03	0,005	4,75E+01	6,8920244	1,15E+00	0,095	2,17E-04		
L	1,00E + 02		0,006	4,70E+01	6,8556546	1,35E+00	0,094	2,97E-04		
R	0,1		0,007	4,65E+01	6,8190908	1,54E+00	0,093	3,88E-04		
			0,008	4,60E+01	6,78233	1,73E+00	0,092	4,89E-04		
$\tau_R$	5,00E + 01		0,009	4,55E+01	6,7453688	1,90E+00	0,091	5,99E-04		

Рис. 1. Лист Excel для вычисления скорости и расхода жидкости в цилиндрической трубе

Формульное значение в ячейке G3 (в фрагменте это соответствует скорости  $V$ ) имеет вид:  
 $=G2-B\$9/B\$11*((-(C\$3-F3)+КОРЕНЬ((C\$3-F3)^2+4*B\$4*B\$5*F3))/2/B\$4)^2*(E3-E2)$ ;  
 а в ячейке i3 (что соответствует расходу  $Q$ ):  
 $=I2-2*ПИ()*H2*(H3-H2)*G3$ .

Для дополнительной проверки правильности методики расчета необходимо провести численный расчет и расчет по аналитическому выражению для хорошо изученного случая степенного закона  $\tau = A \dot{\gamma}^n$  или  $\dot{\gamma} = K \tau^m$ . Для степенного закона известны [1] аналитические выражения для профиля скорости и для величины расхода:

$$V(r) = \frac{K R^{m+1}}{m+1} \left( \frac{P}{2L} \right)^m \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{m+1} \right], \quad (6)$$

#### Зависимость напряжения сдвига от скорости сдвига водного раствора КАРБОПОЛ при температуре 293 К [4]

$\dot{\gamma}, c^{-1}$	0,171	0,316	0,421	0,603	0,812	1,124
$\tau, \text{Па}$	53,14	57,86	61,59	66	70	75,47
$\dot{\gamma}, c^{-1}$	1,382	1,92	2,63	3,67	5,07	
$\tau, \text{Па}$	78,18	84,37	90,23	98,26	106,76	

Экспериментальные результаты в двойных логарифмических координатах представлены на рис. 2. Экспериментальные данные и рассчитанные кривые ОУТ в корневых координатах показаны на рис. 3. Также показана аппроксимация с помощью степенного закона (пунктирная линия). Нет никаких оснований описывать экспериментальную кривую вязкости уравнением Кэссона, однако для аппроксимации вполне подходит обобщенное уравнение течения (сплошная линия).

Профили скорости  $V(R)$  получены численным методом для течения в цилиндрическом канале с помощью двух различных реологических уравнений: обобщенного уравнения течения и степенного закона. Кроме того, профиль скорости рассчитан с помощью аналитического выражения (6), известного для степенного закона.

Расход текучей среды  $Q[\text{м}^3/\text{с}]$  рассчитан с использованием уравнения (7) и с помощью чис-

$$Q = \frac{\pi K R^{m+3}}{m+3} \left( \frac{P}{2L} \right)^m. \quad (7)$$

#### 2. Расчет скорости течения и расхода текучей среды

Будем использовать табличные данные, приведенные в качестве упражнений, в учебном пособии по реологии неньютоновских систем [4]. Водный раствор полимера КАРБОПОЛ (температура 293 К) был исследован с помощью ротационного вискозиметра. Данные представлены в таблице.

В этом пособии студентам предлагают описать полученные реологические данные с помощью уравнений Бингама, Кэссона и Гершеля – Балкли.

ленного расчета с использованием степенного закона:  $Q_{\text{СТ, ОСТ}} = 1,02 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}$  и  $Q_{\text{СТ, ЧИСЛ}} = 1,01 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}$ , соответственно. Величины объемного расхода, полученные аналитически и численным расчетом, практически совпадают. Также сходны профили скорости, рассчитанные численно и из аналитического выражения (рис. 4). Это указывает на достаточную точность применяемого метода численного расчета.

Для течения, которое описывается ОУТ, пока не получены аналитические выражения для расхода и профиля скорости течения в трубе. Численный метод позволяет рассчитать профиль скорости  $V(R)$  и объемный расход текучей среды  $Q_{\text{ОУТ, ЧИСЛ}} = 1,05 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}$ . Как профиль скорости (рис. 4), так и величина расхода близки к тем, что получены для степенного закона. Таким образом, предложенный метод приближенного расчета течения в цилиндрической трубе с использованием обобщенного уравнения течения представляется приемлемым.

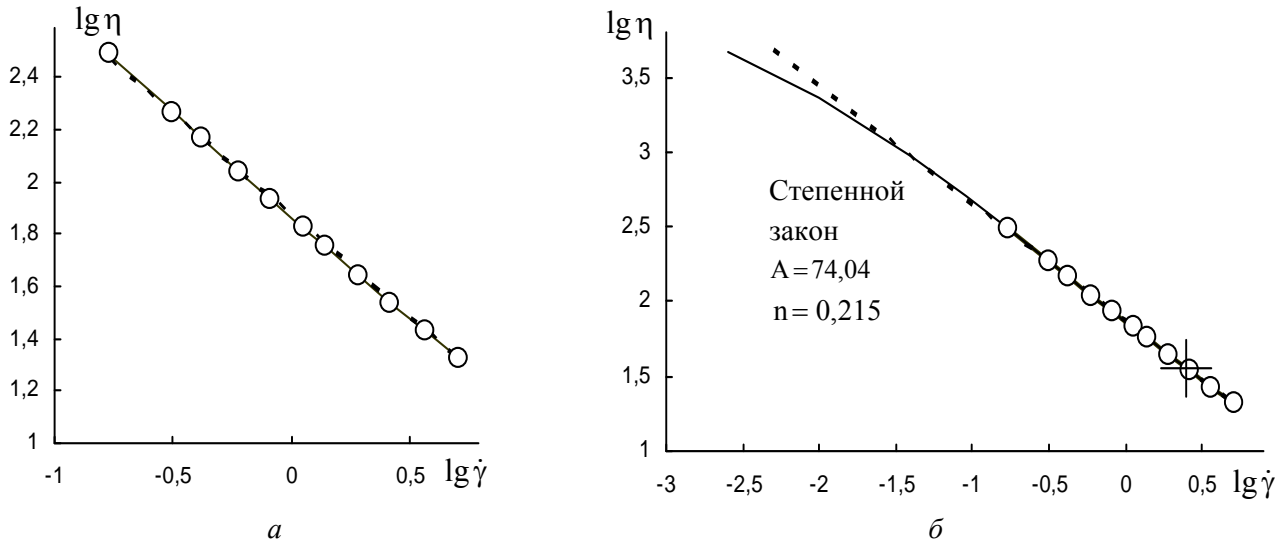


Рис. 2. Реологическое поведение водного раствора полимера КАРБОПОЛ:

*a* – кривая вязкости в двойных логарифмических координатах; *б* – кривая вязкости с участком экстраполяции, который захватывает интервал низких скоростей сдвига.

Сплошная линия соответствует обобщенному уравнению течения (ОУТ), пунктирная линия – степенному закону (уравнению Оствальда). Крест указывает экспериментальные данные, для которых проводился расчет профиля скорости и расхода текучей среды. Видно, что в интервале аппроксимации расчетные значения для степенного закона и ОУТ практически совпадают. Коэффициенты уравнения Оствальда приведены на графике

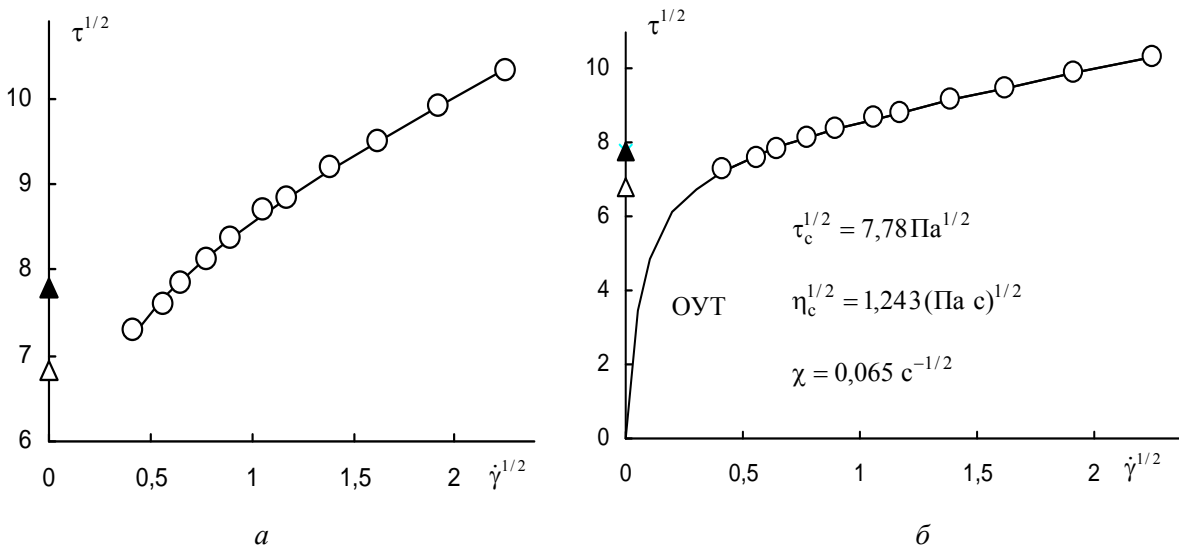


Рис. 3. Реологическое поведение водного раствора полимера КАРБОПОЛ:

*a* – кривая течения в корневых координатах на интервале аппроксимации;

*б* – кривая течения с участком экстраполяции. Белый треугольник указывает

экспериментальное значение предельного напряжения сдвига, определенного методом крыльчатки. Черный треугольник указывает значение предельного напряжения сдвига  $\tau_c$  из ОУТ. Коэффициенты ОУТ приведены на графике

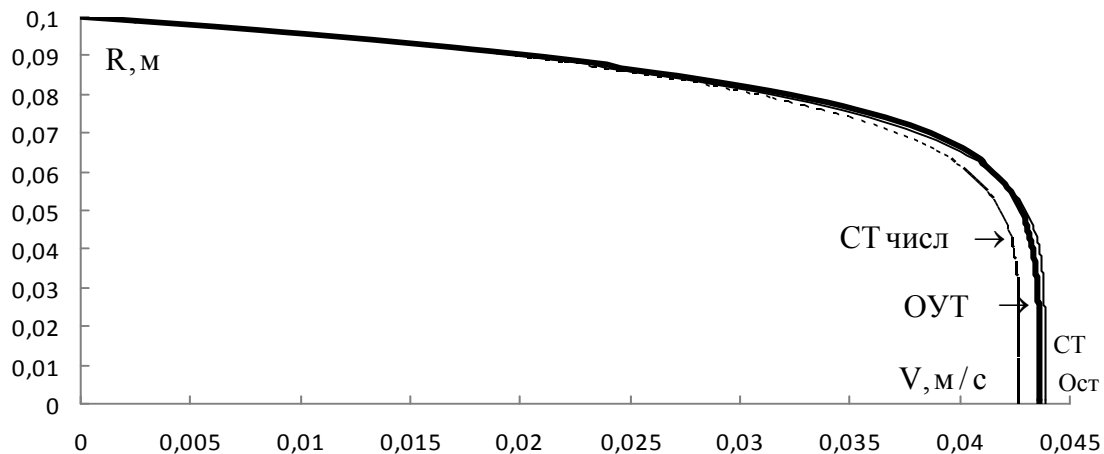
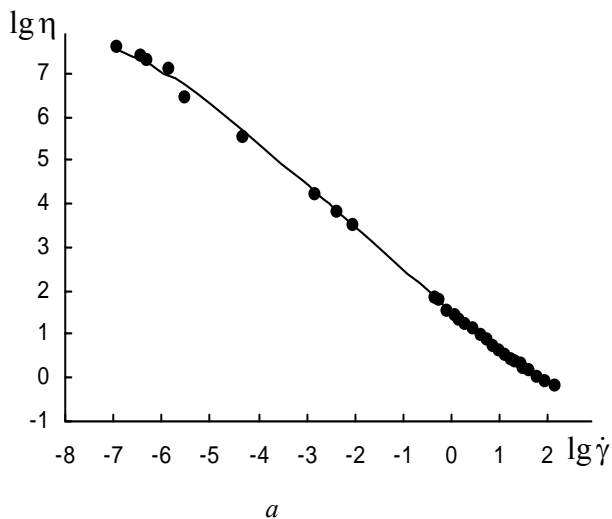


Рис. 4. Профиль скорости течения в цилиндрическом канале  $R = 0,1$  м, длиной  $L = 1$  м, разность давлений  $P = 1,8 \cdot 10^3$  Па. Значение напряжения на стенке трубы равно  $\tau_R = 90$  Па.

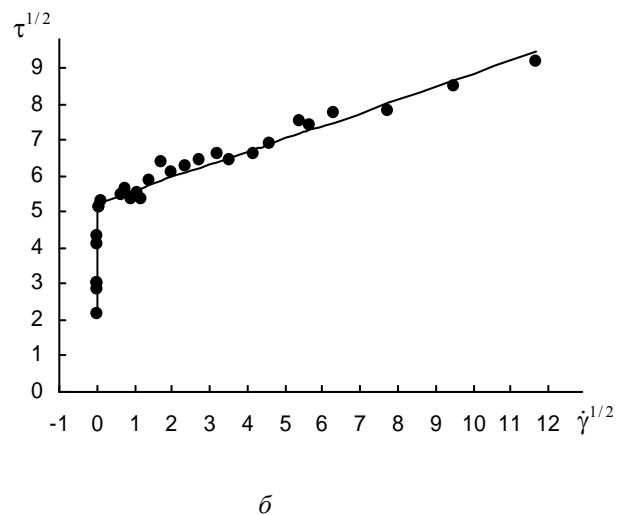
Толстая линия – результат численного расчета с использованием обобщенного уравнения течения; тонкая линия (справа) – результат расчета по формуле (6) для степенного закона; пунктирная линия (слева) – результат численного расчета для степенного закона

Выясним, как влияет изменение коэффициента  $\chi$  на характер профиля скорости и расход жидкости в трубе. Отметим, что уменьшение  $\chi$  соответствует разрыхлению агрегатов вплоть до сплошной сетки при  $\chi = 0$ , увеличение  $\chi$  соответствует увеличению компактности агрегатов и уменьшению вязкости. Будем использовать коэффициенты ОУТ, полученные для другого образца Карбопола с концентрацией 0,3 мас. % [5],

а именно,  $\tau_c^{1/2} = 5,24$  (Па) $^{1/2}$ ,  $\eta_c^{1/2} = 0,36$  (Па с) $^{1/2}$ ,  $\chi = 0,00054$  с $^{-1/2}$  (на рис. 5, 6). Это уравнение описывает весь диапазон скоростей сдвига от  $10^{-7}$  до  $10^2$  с $^{-1}$ . Участок скоростей сдвига от  $10^{-2}$  до  $10^2$  с $^{-1}$  можно аппроксимировать с помощью уравнения Кэссона ( $\tau_c^{1/2} = 5,33$  (Па) $^{1/2}$ ,  $\eta_c^{1/2} = 0,34$  (Па с) $^{1/2}$ ,  $\chi = 0$  с $^{-1/2}$ ).



а



б

Рис. 5. Реологическое поведение 0,3 % водного раствора полимера КАРБОПОЛ: а – кривая вязкости в двойных логарифмических координатах; б – кривая течения в корневых координатах. Кривая рассчитана по обобщенному уравнению течения. Данные из работы [5]

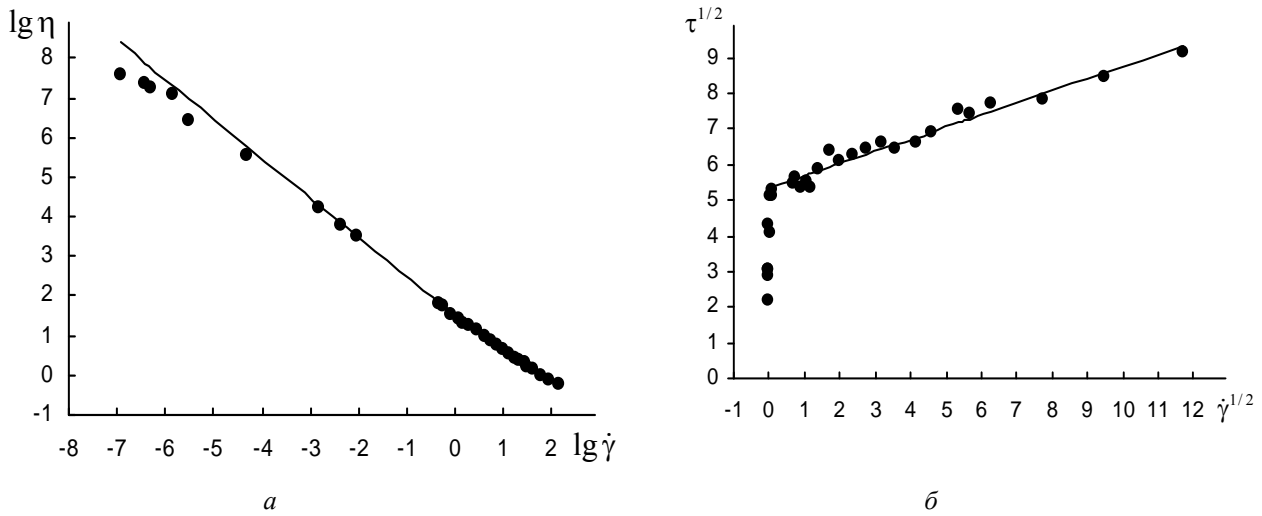


Рис. 6. Реологическое поведение 0,3 % водного раствора полимера КАРБОПОЛ: а – кривая вязкости в двойных логарифмических координатах; б – кривая течения в корневых координатах. Кривая рассчитана по реологическому уравнению Кэссона. Данные из работы [5]

Профиль скорости для такого уравнения показан кривой 2 на рис. 7. Увеличение компактности агрегатов (увеличение  $\chi$ ) ослабляет «пробочный» характер течения в трубе (кривая 3) и увеличивает величину расхода жидкости  $Q$  [ $\text{м}^3/\text{с}$ ] (указана на графике).

Для большинства реологических уравнений получены [6] аналитические выражения для профиля скорости и величины расхода, в том числе, для уравнения Кэссона. В принципе интересно получить аналогичные уравнения для обобщенного уравнения течения.

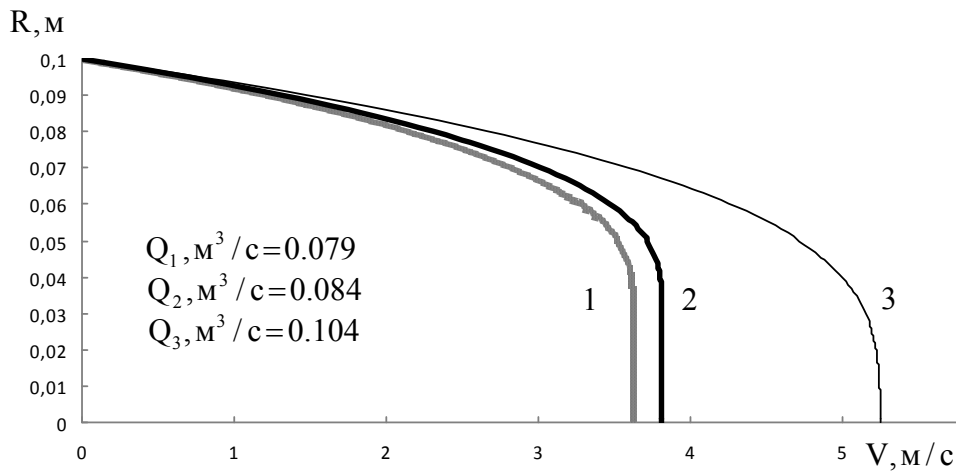


Рис. 7. Профиль скорости течения в цилиндрическом канале радиусом  $R = 0,1 \text{ м}$ , длиной  $L = 1 \text{ м}$ , разность давлений  $P = 1800 \text{ Па}$ . Значение напряжения на стенке трубы равно  $\tau_R = 90 \text{ Па}$ . Толстая линия 2 – результат численного расчета по уравнению Кэссона ( $\chi = 0$ ); серая линия 1 (слева) – результат расчета по ОУТ ( $\chi = 0,00054$ ); тонкая линия 3 (справа) – расчет той же системы с завышенным значением коэффициента  $\chi = 1$

**Список литературы / References**

1. *Малкин А. Я., Исаев А. И.* Реология: концепции, методы, приложения : пер. с англ. СПб. : Профессия, 2007. 560 с.
2. *Шрамм Г.* Основы практической реологии и реометрии : пер. с англ. / под ред. В. Г. Куличихина. М. : КолоСС, 2003. 312 с.
3. *Кирсанов Е. А.* Течение дисперсных и жидкокристаллических систем / под ред. Н. В. Усольцевой. Иваново : Иван. гос. ун-т, 2006. 232 с.
4. *Chhabra R. P., Richardson J. F.* Non-Newtonian Flow in the Process Industries. Fundamentals and Engineering Applications. Butterworth-Heinemann Linacre House, Oxford, 1999.
5. *Barnes H. A.* // in Theoretical and Applied Rheology. Brussels, 1992. Vol. 2. P. 576–578.
6. *Reiner E. O., Haroske D., Kohler K.* // Chemsche technic. 1969. Bd. 21, № 3. S. 137–142.

*Поступила в редакцию 14.07.2013 г.*