

УДК 532.783

А. В. Голованов¹, Л. В. Бабакова², И. А. Карпов²

**ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ
МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ДОМЕНОВ В НЕМАТИКАХ**

¹Институт элементоорганических соединений им. А. Н. Несмеянова РАН,
ул. Вавилова, 28, 119991 Москва, ГСП-1, В-334, Россия. E-mail: gav@ineos.ac.ru

²Московский государственный машиностроительный университет «МАМИ»,
ул. Б. Семеновская, д. 38, 107023 Москва, Россия

Методом линейного анализа устойчивости исследованы одномерные модели магнитогидродинамических доменов, возникающих в нематических жидкокристаллах при деформациях продольного изгиба и кручения. Показано, что данные модели являются устойчивыми. Установлено, что в рамках моделей реализуются состояния двух типов: нейтральной устойчивости и устойчивого узла. Построенные по результатам анализа фазовые портреты иллюстрируют полученные результаты.

Ключевые слова: нематик, деформация продольного изгиба, деформация кручения, линейный анализ устойчивости, фазовый портрет.

DOI: 10.18083/LCAppl.2015.3.119

A. V. Golovanov¹, L. V. Babakova², I. A. Karpov²

**LINEAR STABILITY ANALYSIS OF ONE-DIMENSIONAL MODELS
OF MAGNETO-HYDRODYNAMIC DOMAINS IN NEMATICS**

¹Institute of Organoelement Compounds RAS,
Vavilova str., 28, 119991 Moscow, Russia. E-mail: gav@ineos.ac.ru
²Moscow State University of Mechanical Engineering (MAMI),
L. Semyonovskaya str., 38, 107023 Moscow, Russia

The one-dimensional magneto-hydrodynamic model domains that occur in nematic liquid crystals under the bend and torsion deformations were investigated by the linear stability analysis. It is shown that these models are robust. It is shown that in the framework of the models the states of two types are realized: the neutral stability and the sustainable unit. The phase portraits which were built on the base of the analysis illustrate the obtained results.

Key words: nematic, bend deformation, torsion deformation, linear stability analysis, phase portrait.

Введение

К настоящему времени экспериментально и теоретически изучены гидродинамические домены (ГД) двух видов, возникающие в нематических жидких кристаллах (НЖК) под действием магнитного поля – полосатые и паркетные [1–6]. Обе доменные структуры являются линиями вихря. Одна имеет вид чередующихся светлых и темных полос, другая представляет собой светлые и темные полосы, расположенные под углом друг к другу в виде паркета. Полосатые домены наблюдались в геометриях деформации поперечного изгиба в термотропных нематиках и кручения в лиотропных нематиках, паркетные – в геометрии поперечного изгиба в лиотропных нематиках.

В [1] были предложены две модели возникновения полосатых доменов: а) двухмерная модель течения нематика для деформации поперечного изгиба с жесткими граничными условиями; б) одномерная – для продольного изгиба в случае неограниченной среды. В [2] рассмотрена одномерная модель течения для деформации кручения с жесткими граничными условиями, в [4] та же модель с нежесткими границами. Трехмерная модель течения нематической жидкости была представлена в [5] для объяснения возникновения паркетных доменов. Теоретическую основу этих моделей составляют линеаризованные уравнения Навье – Стокса (НС) и движения директора [7], являющиеся системой сопряженных параболического типа дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных. Здесь необходимо отметить, что в четырех моделях, за исключением модели для продольного изгиба в случае неограниченной среды, членом $\rho(\partial v/\partial t)$ в уравнении НС пренебрегают. Кроме того во всех моделях в уравнении движения директора отбрасывается инерционный член $\sim I\omega^2$ [7].

Пренебрежение членом $\rho(\partial v/\partial t)$ в уравнении НС не позволяет преобразовать систему уравнений в частных производных в какую-нибудь конечную систему дифференциальных уравнений и исследовать зависимость ее переменных от времени.

Существует метод известный как линейный анализ устойчивости динамических систем [8, 9]. Этот метод позволяет определять устойчивость состояния системы на основе анализа переменных, доступных наблюдателю, изменяющихся с

текущим временем. Основой данного метода является оценка устойчивости стационарных решений дифференциальных уравнений, называемых эволюционными. Задачей линейного анализа устойчивости является выяснение типа реализующейся устойчивости/неустойчивости и построение фазового портрета исследуемой динамической системы.

Ниже будет показано, что, не пренебрегая членом $\rho(\partial v/\partial t)$ в уравнении НС, систему уравнений НС и движения директора можно преобразовать к эволюционному уравнению. Поэтому целью данной работы является линейный анализ устойчивости, предложенных в [1, 2, 4], одномерных моделей МГД доменов.

Теоретическая часть

Под одномерным течением нематической жидкости будем понимать то, для которого скорость течения является функцией одной пространственной координаты x , y или z [10].

Деформация продольного изгиба в случае неограниченной среды

В одномерной модели для этой деформации, как говорилось выше, был учтен член $\rho(\partial v/\partial t)$, но система уравнений в частных производных не была преобразована к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В рамках модели были получены: дисперсионная зависимость обратного времени включения доменной структуры s от квадрата волнового вектора q_x^2 и квадрата напряженности магнитного поля H^2 , а также зависимость $q_x^2(H^2)$.

Уравнения НС и движения директора в представлении [1] имеют вид:

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \eta_2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \quad (1)$$

$$\gamma_1 \frac{\partial \theta}{\partial t} = \chi_a H^2 \theta + K_3 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \alpha_2 \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad (2)$$

где $\eta_2 = \frac{1}{2}(-\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5)$, α_i – коэффициенты вязкости Лесли, γ_1 – вращательная вязкость, χ_a – анизотропия диамагнитной восприимчивости, K_3 – константа упругости продольного изгиба, ρ – плотность нематика.

В отличие от [1], решения уравнений (1) и (2) будем искать в следующем виде:

$$v_z = v_0(t) \sin q_x x, \quad (3)$$

$$\theta = \theta_0(t) \cos q_x x, \quad (4)$$

где q_x – волновой вектор доменной структуры вдоль оси x . Подставляя (3) и (4) соответственно в (1) и (2), получим после некоторых преобразований однородную систему дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, являющуюся эволюционным уравнением задачи

$$\begin{cases} \frac{dv_0}{dt} = \left(\frac{\alpha_2^2 - \eta_2}{\rho\gamma_1} - \frac{1}{\rho} \right) q_x^2 v_0 + \left(\frac{\alpha_2 K_3}{\rho\gamma_1} q_x^3 - \frac{\alpha_2 \chi_a H^2}{\rho\gamma_1} q_x \right) \theta_0, \\ \frac{d\theta_0}{dt} = \left(\frac{\chi_a H^2}{\gamma_1} - \frac{K_3}{\gamma_1} q_x^2 \right) \theta_0 - \frac{\alpha_2}{\gamma_1} q_x v_0 \end{cases}. \quad (5)$$

Для нахождения стационарного решения используем очевидное равенство нулю правых частей уравнений в (5)

$$\begin{cases} \left(\frac{\alpha_2^2 - \eta_2}{\rho\gamma_1} - \frac{1}{\rho} \right) q_x^2 v_{0ct} + \left(\frac{\alpha_2 K_3}{\rho\gamma_1} q_x^3 - \frac{\alpha_2 \chi_a H^2}{\rho\gamma_1} q_x \right) \theta_{0ct} = 0, \\ \left(\frac{\chi_a H^2}{\gamma_1} - \frac{K_3}{\gamma_1} q_x^2 \right) \theta_{0ct} - \frac{\alpha_2}{\gamma_1} q_x v_{0ct} = 0 \end{cases}. \quad (6)$$

Откуда следует, что стационарным решением задачи является

$$v_{0ct} = \theta_{0ct} = 0. \quad (7)$$

Кроме того, решая систему относительно q_x^2 , находим что

$$q_x^2 = \frac{\chi_a}{K_3} H^2. \quad (*)$$

Такое же соотношение получено в [1].

Далее, задаем возмущение каждого стационарного решения

$$\begin{aligned} v_{0B} &= v_{0ct} + V(t) \\ \theta_{0B} &= \theta_{0ct} + \Theta(t), \end{aligned} \quad (8)$$

где v_{0B} и θ_{0B} – возмущенные значения величин v_{0ct} и θ_{0ct} , $V(t)$ и $\Theta(t)$ – возмущения. Составляем уравнение для возмущений. Подставим (8) в (5) и, учитывая (7), получим

$$\begin{cases} \frac{d\Theta}{dt} = f_1 \\ \frac{dV}{dt} = f_2 \end{cases}. \quad (9)$$

$$\text{где } f_1 = \left(\frac{\chi_a H^2}{\gamma_1} - \frac{K_3}{\gamma_1} q_x^2 \right) \Theta - \frac{\alpha_2}{\gamma_1} q_x V, \\ f_2 = \left(\frac{\alpha_2 K_3}{\rho\gamma_1} q_x^3 - \frac{\alpha_2 \chi_a H^2}{\rho\gamma_1} q_x \right) \Theta + \left(\frac{\alpha_2^2}{\rho\gamma_1} - \frac{\eta_2}{\rho} \right) q_x^2 V$$

Система (9) имеет две переменные, поэтому дальнейший анализ проводим, следуя методике представленной в [8, 9]. Чтобы проверить стационарное решение (7) на устойчивость достаточно определить знаки величин B , D и Δ , которые определяют корни характеристического уравнения задачи

$$s^2 - Bs + \Delta = 0. \quad (10)$$

Здесь s – обратное время включения доменной структуры,

$$\begin{aligned} B &= k_{11} + k_{22}; & \Delta &= k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}; \\ D &= B^2 - 4\Delta. \end{aligned} \quad (11)$$

Коэффициенты k_{ij} определяются как

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{\partial f_1}{\partial \Theta}; & k_{12} &= \frac{\partial f_1}{\partial V}; \\ k_{21} &= \frac{\partial f_2}{\partial \Theta}; & k_{22} &= \frac{\partial f_2}{\partial V}. \end{aligned}$$

Учитывая (*), исключаем волновой вектор q_x из этих коэффициентов. Получим:

$$\begin{aligned} k_{11} &= 0; & k_{12} &= -\frac{\alpha_2}{\gamma_1} \sqrt{\frac{\chi_a}{K_3}} H; \\ k_{21} &= 0; & k_{22} &= \left(\frac{\alpha_2^2 - \eta_2}{\gamma_1} \right) \frac{\chi_a H^2}{\rho K_3}. \end{aligned} \quad (12)$$

Исходя из формул (11) и (12) находим $B = k_{22}$, $\Delta = 0$ и $D = k_{22}^2$. Из (12) видно, что знак величины B зависит от разности коэффициентов вязкости. Величина D будет положительной.

Определим знак коэффициента k_{22} . Для этой процедуры в качестве модельной системы используем термотропный нематик *n-метоксибензилиден-n-бутиланилин* (МВБА), поскольку для него все материальные коэффициенты, входящие в (12), измерены [11]. Отношение $\frac{\alpha_2}{\gamma_1} \approx 1$ и $\alpha_2 < \eta_2$,

поэтому $k_{22} < 0$, а значит $B < 0$ при любых значениях величины H отличных от нуля.

Таким образом, мы получили

$$B < 0; \quad \Delta = 0; \quad D > 0.$$

Откуда следует, что уравнение (10) имеет два корня: $s_1 = 0$ и $s_2 < 0$, а закон изменения возмущений с течением времени имеет вид

$$\Theta(t) = C_{11} + \frac{k_{12}}{k_{22}} C_{12} \exp(s_2 t), \quad (13)$$

$$V(t) = C_{22} \exp(s_2 t)$$

где C_{ij} – начальные возмущения

Поскольку $s_2 < 0$, то, очевидно, что возмущения уменьшаются с течением времени и, следовательно, стационарное решение (7) является устойчивым. Устойчивость, реализующаяся в изучаемой системе, характерна для двух типов устойчивости: нейтральной и устойчивого узла [9]. Действительно, возмущение угла ориентации директора $\Theta(t)$ при $t \rightarrow \infty$ стремится к начальному возмущению C_{11} , что характерно для нейтральной устойчивости. Возмущение же скорости течения нематика $V(t)$ при $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю, а это характерно для устойчивого узла. На рис. 1. представлен фазовый портрет, иллюстрирующий полученные выводы.

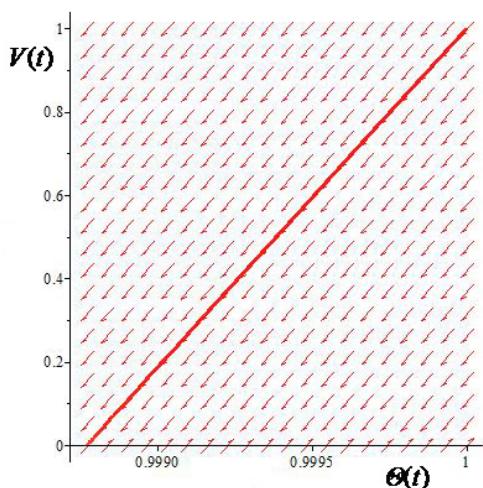


Рис. 1. Фазовый портрет системы:

$$H = 10 \text{ Э; } k_{12} = -3,65 \text{ см}^{-1}; \quad k_{22} = -2,95 \text{ см}^{-1}; \quad t = 100 \text{ с}$$

Проведенный анализ позволяет сделать вывод о том, что в рамках одномерной модели описание доменной структуры вряд ли возможно, поскольку возмущение скорости одномерного течения нематической жидкости, при любой вели-

чине напряженности магнитного поля, релаксирует к невозмущенному состоянию.

Деформация кручения

Следуя [2, 4], рассмотрим деформацию кручения планарного ($\vec{n}_0 \uparrow\uparrow x$) слоя нематика толщиной d с $\chi_a > 0$. Директор и вектор скорости имеют следующие компоненты

$$\vec{n} \equiv (1, \theta(x, z), 0); \quad \vec{v} \equiv (0; v_y(x, z); 0).$$

Считаем, что на границах директор закреплен жестко ($W_s \rightarrow \infty$).

Запишем в линейном приближении уравнения НС и движения директора в безразмерном виде

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} \right) = \nu_2 \frac{\partial^3 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^3} + \eta \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^2} \right) + \nu \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{t}} \right) \quad (14)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{t}} = h^2 \theta + K \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{z}^2} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}}, \quad (15)$$

где $\tilde{x} = \frac{\pi}{d} x$, $\tilde{z} = \frac{\pi}{d} z$, $\tilde{t} = \frac{t}{\tau_0}$, $\tau_0 = \frac{\gamma_1 d^2}{\pi^2 K_2}$ – характеристическое время задачи,

$$\tilde{v} = \frac{v_y}{v_0}, \quad v_0 = \frac{\pi K_2}{\alpha_2 d} \quad \text{– характеристическое}$$

скорость задачи, $h = \frac{H}{H_C}$, $H_C = \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{K_2}{\chi_a}}$ –

критическое поле Фредерикса для деформации кручения, $\nu = \frac{\alpha_2^2}{\rho K_2}$, $\nu_2 = \frac{\gamma_1 \eta_2}{\rho K_2}$, $\eta = \frac{1}{2} \frac{\gamma_1 \alpha_4}{\rho K_2}$,

$$K = \frac{K_3}{K_2}, \quad K_2 \quad \text{– константа упругости кручения.}$$

Границные условия для безразмерных переменных задачи имеют вид

$$\tilde{v} \Big|_{\tilde{z}=\pm\frac{\pi}{2}} = 0; \quad \theta \Big|_{\tilde{z}=\pm\frac{\pi}{2}} = 0. \quad (16)$$

Решения уравнений (14) и (15) будем искать среди функций, периодических вдоль оси x и удовлетворяющих граничным условиям (16)

$$\tilde{v} = \tilde{v}_0(\tilde{t}) \sin \tilde{q}_x \tilde{x} \cos \tilde{z} \quad (17)$$

$$\theta = \theta_0(\tilde{t}) \cos \tilde{q}_x \tilde{x} \cos \tilde{z}, \quad (18)$$

где \tilde{q}_x – безразмерный волновой вектор вдоль оси x . Далее повторяем процедуру, описанную в предыдущей части и приведшую к записи формул (6), (7), (9), (12) и соотношения (*).

Получаем а) эволюционное уравнение задачи

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{v}_0}{dt} = [(\nu - \nu_2)\tilde{q}_x^2 - \eta]\tilde{v}_0 - \nu(h^2 - K\tilde{q}_x^2 - 1)\tilde{q}_x\theta_0 \\ \frac{d\theta_0}{dt} = (h^2 - K\tilde{q}_x^2 - 1)\theta_0 - \tilde{q}_x\tilde{v}_0 \end{cases};$$

б) стационарное решение задачи: $\tilde{v}_{0\text{ст}} = \theta_{0\text{ст}} = 0$;

в) соотношение между величинами \tilde{q}_x^2 и h^2

$$\tilde{q}_x^2 = \frac{h^2 - 1}{K};$$

г) уравнение для возмущений

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{V}}{dt} = [(\nu - \nu_2)\tilde{q}_x^2 - \eta]\tilde{V} - \nu(h^2 - K\tilde{q}_x^2 - 1)\tilde{q}_x\Theta \\ \frac{d\Theta}{dt} = (h^2 - K\tilde{q}_x^2 - 1)\Theta - \tilde{q}_x\tilde{V} \end{cases}$$

д) коэффициенты k_{ij}

$$\begin{aligned} k_{11} &= 0; & k_{12} &= -\sqrt{\frac{h^2 - 1}{K}}; \\ k_{21} &= 0; & k_{22} &= (\nu - \nu_2)\frac{h^2 - 1}{K} - \eta. \end{aligned} \quad (19)$$

Сравнение формул (12) и (19) показывает, что устойчивость/неустойчивость стационарного решения данной задачи, также зависит от знака коэффициента k_{22} . Поскольку величины ν , ν_2 и η являются положительными, а $\nu < \nu_2$, то коэффициент $k_{22} < 0$ при любых значениях h^2 . Следовательно, все выводы, сформулированные выше для модели доменов в геометрии деформации продольного изгиба, остаются справедливыми и для данной модели. На рис. 2. представлен фазовый портрет изучаемой системы.

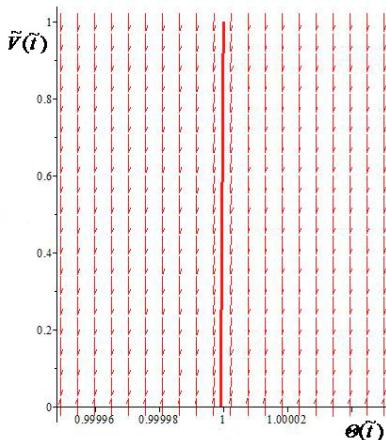


Рис. 2. Фазовый портрет системы:
 $h^2 = 10$; $k_{12} = -2,2$; $k_{22} = -2,8 \cdot 10^6$; $\tilde{t} = 10^{-4}$

Заключение

В настоящей работе с помощью линейного анализа устойчивости исследованы одномерные модели течения нематической жидкости, описывающие появление доменной структуры в деформациях продольного изгиба для бесконечной среды и кручения. Анализ показывает, что в представленных моделях реализуются устойчивые состояния нематика – возмущения угла ориентации директора Θ и скорости V одномерного течения нематика уменьшаются с течением времени. При этом угол ориентации стремится к начальному возмущению, а скорость течения – к нулю. В связи с этим возникает сомнение в правомерности применения одномерных моделей течения нематической жидкости для описания МГД – доменов.

Список литературы / References

1. Guyon E., Meyer R., Salan J. Domain structure in the nematic Fredericksz transition // Mol. Cryst. Liq. Cryst. 1979. Vol. 54. P. 261–273.
2. Lonberg F., Fraden S., Hurd A., Meyer R. Field-induced transient periodic structures in nematic liquid crystals: the twist-Fredericksz transition // Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 52, Iss. 21. P. 1903–1906.
3. Fraden S., Hurd A., Meyer R., Cahoon M., Caspar D. L. D. Magnetic-field-induced alignment and instabilities in ordered colloids of Tobacco Mosaic Virus // J. Phys. (Paris) Coll. 1985. Vol. 46, Iss. C3. P. 85–113.
4. Kaznacheev A. V. Influence of the anchoring energy on the threshold characteristics of the magneto-hydrodynamic domains in the nematic // Mol. Mat. 1993. Vol. 2. P. 283–293.
5. Hurd A. J., Fraden S., Lonberg F., Meyer R. B. Field-induced transient periodic structures in nematic liquid crystals: the splay Frederiks transition // J. Physique (Paris). 1985. Vol. 46. P. 905–917.
6. Golovanov A., Kaznacheev A., Sonin A. Visco-elastic properties of a lyotropic chromonic nematic // Mol. Mat. 1993. Vol. 3. P. 147–155.
7. Пикин С. А. Структурные превращения в жидких кристаллах. М.: Наука, 1981. 336 с. [Pikin S. A. Strukturnye prevrashcheniya v zhidkikh kristallakh. (Structural transformations in liquid crystals). M.: Nauka, 1981. 336 p. (in Russian)].
8. Баблоянц А. Молекулы, динамика и жизнь. Введение в самоорганизацию материи. М.: Мир, 1990. 375 с. [Babloyantz A. Molecules, dynamics and life. An introduction to self-organization of matter. New York: Wiley-Interscience Publication, 1986. 345 p.].

-
9. Шаповалов В. И. Основы теории упорядочения и самоорганизации. М. : Фирма «Испо-Сервис», 2005. 296 с. [Shapovalov V. I. Osnovy teorii uporyadocheniya i samoorganizatsii (Fundamentals of the theory of self-organization and streamlining). Moscow : Firm «Ispo-Service», 2005. 296 p. (in Russian)].
 10. Седов Л. И. Механика сплошной среды. М. : Наука, 1973. Т. 1. 536 с. [Sedov L. I. Mehanika sploshnoj sredy (Continuum mechanics). Moscow : Nauka, 1973. Vol. 1. 536 p. (in Russian)].
 11. Блинов Л. М. Электро- и магнитооптика жидких кристаллов. М. : Наука, 1978. 384 с. [Blinov L. M. Elektro- i magnitooptika zhidkikh kristallov (Electro- and magnetooptics liquid crystals). Moscow : Nauka, 1978. 384 p. (in Russian)].

Поступила в редакцию 22.06.2015 г.