УДК 538.9

Д. В. Кондратьев^{1,2}, Н. Г. Мигранов³, Д. Н. Мигранова⁴

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ КАТАСТРОФ К ОПИСАНИЮ НЕСТАБИЛЬНОСТЕЙ В СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛАХ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

¹Академия наук Республики Башкортостан,

ул. Кирова, д. 15, 450008 Уфа, Россия. E-mail: denis.kondratyev@bk.ru

²Башкирский кооперативный институт (филиал) Российского университета кооперации,
ул. Ленина, д. 26, 450000 Уфа, Россия.

³Башкирский государственный медицинский университет,
ул. Ленина, д. 3, 450008 Уфа, Россия.

⁴Восточная экономико-юридическая гуманитарная академия,
ул. Мубарякова, д. 3, 450092, Уфа, Россия

Предложен новый теоретический подход к описанию равновесного и бистабильного состояний сегнетоэлектрического жидкого кристалла. Образец сегнетоэлектрического жидкого кристалла рассматривается в геометрии «книжной полки» под воздействием магнитного поля. Теории континуума и возмущений используются для установления связи между масштабными коэффициентами в разложении для азимутального угла. Равновесные состояния сегнетоэлектрика SmC определяются в рамках теории катастроф.*

Ключевые слова: сегнетоэлектрический жидкий кристалл, смектические слои, неустойчивость, критические поля.

DOI: 10.18083/LCAppl.2020.3.34

D. V. Kondratyev^{1,2}, N. G. Migranov³, D. N. Migranova⁴

APPLICATION OF CATASTROPHE THEORY TO INSTABILITIES DESCRIPTION OF FERROELECTRIC LIQUID CRYSTALS IN MAGNETIC FIELD

¹Academy of Sciences of Republic Bashkortostan,

15 Kirova St., Ufa, 450008, Russia. E-mail: denis.kondratyev@bk.ru

²Bashkir Cooperative Institute (branch) of the Russian Cooperative University,
26 Lenina St., Ufa, 450000, Russia.

³Bashkir State Medical University, 3 Lenina St., Ufa, 450008, Russia.

⁴Eastern Economics and Law Humanities Academy,
3 Mubarjakova Str., Ufa, 450092, Russia

A new theoretical approach for description of the equilibrium and bistable states of ferroelectric liquid crystal is proposed. A ferroelectric liquid crystal sample is considered in the “bookshelf” geometry under the influence of a magnetic field. Continuum and perturbation theories are used in order to establish the correlation between scale coefficients in the azimuthal angle expansion. The equilibrium states of ferroelectric SmC are determined within the framework of the catastrophe theory.*

Key words: ferroelectric liquid crystal, smectic layers, instability, critical fields.

Введение

Сегнетоэлектрические жидкие кристаллы (С*ЖК) широко используются в оптических системах благодаря быстрому отклику на влияние внешних магнитного и электрического полей. Внутренняя постоянная поляризация делает упорядочение молекул совершенно отличным от обычных жидких кристаллов, и в связи с этим многочисленные технические приложения вызывают большой интерес к исследованиям структур С*ЖК, который опирается на возможность создания широкого спектра быстродействующих низковольтных микродисплеев и проекционных дисплеев, в том числе трехмерных, затворов стереочков, пространственных модуляторов света, элементов и устройств обработки информации, адаптивной оптики, в которых повышенное быстродействие С*ЖК обеспечивает новые функциональные свойства [1, 2, 3].

Однако прогрессу в разработке систем отображения информации препятствует отсутствие достаточных знаний об устойчивости распределения поля директора в СЖК. Решение этой проблемы напрямую связано с исследованием свободной энергии в рассматриваемом образце. Одним из основных преимуществ применения методов теории бифуркаций к нелинейным задачам устойчивости является то, что в целом можно уменьшить размерность исходной системы до низкоразмерной системы, главным образом в окрестности критических точек. Этот подход успешно реализован в исследовании С*ЖК для случая внешнего электрического поля в работе [4].

Как известно, теории бифуркаций и катастроф являются двумя наиболее известными инструментами для исследования динамических систем. В силу своего топологического характера теория катастроф имеет ряд преимуществ, позволяющих получить качественные результаты. Модели катастроф успешно применяются в различных областях исследований [5].

В наших исследованиях мы использовали асимптотические методы – разложение азимутального угла в ряд, чтобы получить соотношения для определяющих параметров. Из-за сложности уравнения баланса крутящего момента трудно найти значения определяющих параметров и рассчитать минимумы свободной энергии. Прикладная теория катастроф для изучения потенциала свободной энергии СЖК дала подробное математическое

описание того, как геометрия функционала энергии изменяется в зависимости от параметров управления. Локальная геометрия вокруг критических точек функционала свободной энергии представлена определенной функцией катастрофы, которая определяется плотностями упругой, поверхностной и магнитной энергии сегнетоэлектрика.

Теория

Свободная энергия G представляет собой интеграл плотности свободной энергии внутри ячейки сегнетоэлектрического жидкого кристалла, которая может быть записана как

$$G(\phi) = \int_0^d (F_e(\phi) + F_m(\phi) + F_s(\phi)) dy, \quad (1)$$

где $F_e(\phi)$ – упругая свободная энергия, $F_m(\phi)$ – составляющая внешнего магнитного поля в упругую энергию, $F_s(\phi)$ – поверхностная свободная энергия, d – нормализованная толщина пленки сегнетоэлектрика, а ϕ – азимутальный угол макромолекулы в слое пленки, $y \in [0, 1]$ в тонкой пленке. Вариационный принцип $\partial G / \partial \phi = 0$ позволяет найти устойчивое решение задачи молекулярной ориентации в образце сегнетоэлектрика. Однако, чтобы изучить поведение потенциальной функции, необходимо получить потенциальную функцию в виде

$$G(a_i, c), \quad (2)$$

где a_i – некоторые параметры, которые соответствуют азимутальному углу, а c – все управляющие процессом ориентации в пленке сегнетоэлектрика параметры, которые не зависят от ϕ . Разложим азимутальный угол ϕ в ряд:

$$\phi = \sum_{i=0}^n a_i y^i = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_n y^n. \quad (3)$$

Предполагается, что базовые функции для такого разложения являются полиномами, а a_i являются весовыми параметрами для каждой полиномиальной базовой функции: a_0 – постоянный член, a_1 – линейный член, a_2 – квадратичный член. Преимущество этого метода состоит в том, что можно рассчитать интеграл в аналитической форме. Интеграл полиномиальных членов прост, и основные функции подходят для описания

молекулярного распределения с ламинарным закреплением. Перепишем плотность свободной энергии как функцию от a_i , используя соотношение (3) и разложения тригонометрических функций в ряд Тейлора по малому азимутальному углу ϕ :

$$\begin{aligned}\sin \phi &\approx \phi - \frac{1}{6}\phi^3 + \frac{1}{120}\phi^5, \\ \cos \phi &\approx 1 - \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{24}\phi^4 - \frac{1}{720}\phi^6,\end{aligned}$$

получим:

$$\begin{aligned}\sin \phi &\approx \left(-\frac{1}{2}a_0a_2^2 - \frac{1}{2}a_1^2a_2 + \frac{1}{12}a_0^3a_2^2 + \frac{1}{4}a_0^2a_1^2a_2 + \frac{1}{24}a_0a_1^4\right)y^4 + \\ &+ \left(\frac{1}{6}a_2a_0^3a_1 + \frac{1}{12}a_0^2a_1^3 - a_0a_1a_2 - \frac{1}{6}a_1^3\right)y^3 + \left(a_2 - \frac{1}{2}a_2a_0^2 - \frac{1}{2}a_0a_1^2 + \frac{1}{24}a_2a_0^4 + \frac{1}{12}a_1^2a_0^3\right)y^2 + \\ &+ \left(a_1 - \frac{1}{2}a_1a_0^2 + \frac{1}{24}a_1a_0^4\right)y + a_0 - \frac{1}{6}a_0^3 + \frac{1}{120}a_0^5, \\ \cos \phi &\approx \left(\frac{1}{4}a_0^2a_2^2 + \frac{1}{2}a_0a_1^2a_2 + \frac{1}{24}a_1^4 - \frac{1}{2}a_2^2 - \frac{1}{48}a_0^4a_2^2 - \frac{1}{12}a_0^3a_1^2a_2 - \frac{1}{48}a_0^2a_1^4\right)y^4 + \\ &+ \left(-\frac{1}{24}a_0^4a_1a_2 - \frac{1}{36}a_0^3a_1^3 + \frac{1}{2}a_0^2a_1a_2 + \frac{1}{6}a_0a_1^3 - a_1a_2\right)y^3 + \\ &+ \left(-\frac{1}{120}a_2a_0^5 - \frac{1}{48}a_1^2a_0^4 + \frac{1}{6}a_2a_0^3 + \frac{1}{4}a_1^2a_0^2 - a_0a_2 - \frac{1}{2}a_1^2\right)y^2 + \\ &+ \left(-\frac{1}{120}a_1a_0^5 + \frac{1}{6}a_1a_0^3 - a_0a_1\right)y + 1 - \frac{1}{2}a_0^2 + \frac{1}{24}a_0^4 - \frac{1}{720}a_0^6.\end{aligned}$$

Следует отметить, что для тонкопленочного сегнетоэлектрика существуют только три основных весовых коэффициента, a_0 , a_1 и a_2 , и что линейный член a_1 может рассматриваться как наиболее взвешенный член из-за профиля переключения в

ячейке сегнетоэлектрика. Использование этих разложений для определения общей плотности свободной энергии G требует сложных операций. После символьных преобразований и последовательных упрощений получим:

$$\begin{aligned}F_e(\phi) &= -\frac{1}{6}A\nu a_1^6y^4 + \frac{1}{2}A\nu a_1^4y^2 + \frac{1}{2}Aa_1^2 + F_0, \\ F_m(\phi) &= -\chi_a\mu_0H_0^2\sin^2\theta\left(\frac{1}{45}a_1^6y^6 - \frac{1}{6}a_1^4y^4 + \frac{1}{2}a_1^2y^2\right), \\ F_s(\phi) &= -\left(\frac{1}{120}g_2\sin\varphi_s + \frac{2}{15}g_1\sin 2\varphi_s\right)a_1^5y^5 - \left(\frac{1}{24}g_2\cos\varphi_s + \frac{1}{3}g_1\cos 2\varphi_s\right)a_1^4y^4 + \\ &+ \left(\frac{1}{6}g_2\sin\varphi_s + \frac{2}{3}g_1\sin 2\varphi_s\right)a_1^3y^3 + \left(\frac{1}{2}g_2\cos\varphi_s + g_1\cos 2\varphi_s\right)a_1^2y^2 - \\ &- (g_2\sin\varphi_s + g_1\sin 2\varphi_s)a_1y - g_2\cos\varphi_s - g_1\cos^2\varphi_s.\end{aligned}$$

Параметры этих уравнений выражаются [6]: $A = K_{11}\sin 2\theta$, $B = (K_{22}\cos 2\theta + K_{33}\sin 2\theta)\sin 2\theta$, $\nu = (B - A)/A$, K_{11} , K_{22} и K_{33} – это коэффициенты упругости соответствующие продольным, вращательным и изгибным деформациям; q_T ,

q_B – волновые числа, характеризующие закручивание и изгиб поля директора образца сегнетоэлектрического ЖК, и $F_0 = (K_{22}q_T^2 + K_{33}q_B^2)/2$, θ – полярный угол молекулы сегнетоэлектрика [6],

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная, χ_a – анизотропия магнитной восприимчивости образца сегнетоэлектрика, а H – магнитное поле, φ_s – угол преднаклона, а g_1 и g_2 – коэффициенты неполярного и полярного взаимодействия между

молекулами рассматриваемого образца и ограничивающими поверхностями. Поскольку мы используем линейный член для описания угла ϕ , то для изменения бистабильности необходима более высокая энергия. Интегрирование дает следующие результаты для энергии G :

$$\begin{aligned} G_m(a_1, c) = & -\frac{1}{30} A \nu a_1^6 d^5 - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{120} g_2 \sin \varphi_s + \frac{2}{15} g_1 \sin 2\varphi_s \right) a_1^5 d^6 + \left(\frac{1}{6} A \nu d^3 + \right. \\ & + \frac{1}{15} \left(\frac{1}{2} \chi_a \mu_0 H_0^2 \sin^2 \theta - \frac{1}{8} g_2 \cos \varphi_s - g_1 \cos 2\varphi_s \right) d^5 \Big) a_1^4 + \\ & + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{2} g_2 \sin \varphi_s + 2g_1 \sin 2\varphi_s \right) a_1^3 d^4 + \left(\frac{1}{2} A d - \frac{1}{6} \left(\chi_a \mu_0 H_0^2 \sin^2 \theta - g_2 \cos \varphi_s - 2g_1 \cos 2\varphi_s \right) d^3 \right) a_1^2 - \\ & - \frac{1}{2} (g_2 \sin \varphi_s + g_1 \sin 2\varphi_s) a_1 d^2 + (F_0 - g_2 \cos \varphi_s - g_1 \cos^2 \varphi_s) d. \end{aligned} \quad (4)$$

Слагаемые, соответствующие нечетным степеням a_1 в (4), происходят из поверхностной плотности энергии. Для дальнейшего упрощения мы разделяем неполярные и полярные коэффициенты взаимодействия и запишем потенциальную функцию без поверхностной энергии

$\tilde{G}_m(a_1, c) = \lim_{g_1, g_2 \rightarrow 0} G_m(a_1, c) = Q_0 a_1^6 + R_0 a_1^4 + S_0 a_1^2 + T_0$,
где

$$Q_0 = -\frac{1}{30} A \nu d^5, \quad R_0 = \frac{1}{6} A \nu d^3 + \frac{1}{30} \chi_a \mu_0 H_0^2 d^5 \sin^2 \theta,$$

$$S_0 = \frac{1}{2} A d - \frac{1}{6} \chi_a \mu_0 H_0^2 d^3 \sin^2 \theta, \quad T_0 = F_0 d.$$

Заметим, что $\left| \frac{1}{6} A \nu y^3 \right| > \left| \frac{1}{30} A \nu y^5 \right|$, $y \in [0, 1]$.

Для типичных материальных параметров сегнетоэлектрика коэффициент Q_0 для члена a_1^6 намного меньше, чем для остальных членов. Теперь вернемся к слагаемым поверхностной энергии в (4). Есть три основных слагаемых, которые мы объединяем вместе как функцию $G_s(a_i, c)$:

$$\begin{aligned} G_s(a_i, c) = & -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{120} g_2 \sin \varphi_s + \frac{2}{15} g_1 \sin 2\varphi_s \right) a_1^5 d^6 + \\ & + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{2} g_2 \sin \varphi_s + 2g_1 \sin 2\varphi_s \right) a_1^3 d^4 - \frac{1}{2} (g_2 \sin \varphi_s + g_1 \sin 2\varphi_s) a_1 d^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Величина члена, соответствующего первой степени a_1 в (5), намного выше, чем у двух других членов, особенно потому, что для большинства сегнетоэлектриков полярный коэффициент взаимодействия g_2 больше, чем коэффициент неполярного

взаимодействия g_1 . Поэтому целесообразно рассматривать слагаемые a_1 как доминирующие для расчета поверхностной энергии F_s . Тогда окончательная нормализованная форма может быть записана:

$$G_m^*(a_1, c) = G_m(a_1, c) / R = [\tilde{G}_m(a_1, c) + G_s(a_1, c)] / R_0 = a_1^4 + \nu a_1^2 + \nu a_1 + m,$$

где

$$\begin{aligned} u &= \frac{\frac{1}{2}A - \frac{1}{6}\chi_a\mu_0 H_0^2 d^2 \sin^2 \theta}{\frac{1}{6}A v d^2 + \frac{1}{30}\chi_a\mu_0 H_0^2 d^4 \sin^2 \theta}, \\ v &= \frac{-\frac{1}{2}(g_2 \sin \varphi_s + g_1 \sin 2\varphi_s)}{\frac{1}{6}A v d^2 + \frac{1}{30}\chi_a\mu_0 H_0^2 d^4 \sin^2 \theta}, \\ m &= \frac{F_0}{\frac{1}{6}A v d^2 + \frac{1}{30}\chi_a\mu_0 H_0^2 d^4 \sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (6)$$

Это стандартная форма катастрофы типа сборки, приведенной на рис. 1 [5].

Рис. 1. Зависимость весового коэффициента a_1 от параметров u и v

Fig. 1. The dependence of the weight coefficient a_1 on parameters u and v

Результаты и обсуждение

Типичные порядки величины для параметров сегнетоэлектрического жидкого кристалла можно найти в [6, 7] (например, $K_{ij} \approx 10^{-11}$ Н, $H \approx 10^6$ В/м).

Можно отметить, что порядки рассматриваемых в статье энергетических составляющих следующие:

$$F_e \approx K_{ij} \approx 10^{-11}, F_m \approx 10, F_s \approx g_i.$$

На рисунке 2 приведено сравнение нормированных энергетических членов в $G_m^*(a_1, c)$ для разных углов преднаклона φ_s . Очевидно, члены поверхностного натяжения (g_1, g_2) играют уникальную роль в потенциальной функции. Математическая форма может быть записана в пространстве параметров $\Delta - u - v$. Теория катастроф [5] говорит нам, что неустойчивость существует, если

$$\Delta(a_1, c) = -8u^3 - 27v^2 \geq 0.$$

Можно применять этот критерий для изучения допусков изготовления для конкретного устройства на основе сегнетоэлектриков. В рамках предложенной работы мы рассматриваем в качестве управляющего параметра приложенное магнитное поле H . Расчеты показали, что в одноконстантном приближении при $v = 0$ для следующих значений материальных параметров образца сегнетоэлектрика $\theta = \frac{2\pi}{15}$, $K = 10^{-11}$ Н, $\chi_a = 1,55 \cdot 10^{-6}$ возможна неустойчивость в распределении поля директора ($\Delta(a_1, c) \geq 0$).

На рисунке 3 приведен график зависимости $\Delta(a_1, c)$ от H_0 . Результаты расчетов показывают, что для

$$H_0 \in (-6.18 \cdot 10^6; -1.58 \cdot 10^{-12}) \cup (1.58 \cdot 10^{-12}; 6.18 \cdot 10^6)$$

дискриминант отрицательный, а следовательно, для данного диапазона значений исследуемая система устойчива.

Рис. 2. Вариации нормированных энергетических членов в $G_m^*(a_1, c)$ для различных (g_1, g_2) :

$a - g_1 = g_2 = 5$; $b - g_1 = g_2 = 1$; $c - g_1 = g_2 = 0.5$; $d - g_1 = g_2 = 0.1$

Fig. 2. Variations of normalized energy terms of $G_m^*(a_1, c)$ for various (g_1, g_2) :

$a - g_1 = g_2 = 5$; $b - g_1 = g_2 = 1$; $c - g_1 = g_2 = 0.5$; $d - g_1 = g_2 = 0.1$

Рис. 3. Зависимость дискриминанта $\Delta(a_1, c)$ от H_0
 Fig. 3. The dependence of the discriminant $\Delta(a_1, c)$ on H_0

Заключение

Используя теорию катастроф, устойчивость распределения поля директора в образце сегнетоэлектрика можно исследовать в более общем виде. Доказано, что категория катастрофического поведения относится к типу сборки при линейном рассмотрении. Критерий неустойчивости также может быть определен характером потенциальной функции через профили параметров $\Delta - u - v$. Таким образом, благодаря теории катастроф удалось, используя линейное приближение, оценить область изменения приложенного внешнего магнитного поля, позволяющую оставаться системе в устойчивом состоянии и тем самым указывать для экспериментальных приложений пределы изменения магнитного поля для регулирования процессов воздействия внешних полей на поведение сегнетоэлектрического жидкого кристалла. Важным обстоятельством является при этом роль управляющих параметров u и v (6), плавное изменение которых может привести к скачкообразному изменению функционирования рассматриваемой системы. А разрывы в плавных, непрерывных процессах при воздействии магнитным полем на анизотропную жидкость – сегнетоэлектрический жидкий кристалл и внезапные качественные изменения поведения этой системы, когда она является при-

бором для отображения информации и других целей должны быть исключены. Теория катастроф на достаточно высоком качественном уровне позволяет определять области изменения управляющих параметров и тем самым обеспечивать работоспособность прибора, содержащего сегнетоэлектрический жидкий кристалл.

Список литературы / References

1. Андреев А. Л., Компанец И. Н. Применения сегнетоэлектрических жидких кристаллов – реальные и возможные (обзор) // *Жидк. крист. и их практич. использ.* 2015. Т. 15, № 3. С. 28–40. [Andreev A.L., Kompanets I.N. Applications of ferroelectric liquid crystals – real and possible (review). *Liq. Cryst. and their Appl.*, 2015, **15** (3), 28–40. (in Russ.). DOI: 10.18083/LCAppl.2015.3.28].
2. Чигринов В. Г., Шривастава А. К., Пожидаев Е. П. Сегнетоэлектрические жидкие кристаллы: физика и области применения // *Жидк. крист. и их практич. использ.* 2016. Т. 16, № 1. С. 9–21. [Chigrinov V.G., Srivastava A.K., Pozhidaev E.P. Ferroelectric liquid crystals: physics and applications. *Liq. Cryst. and their Appl.*, 2016, **16** (1), 9–21. (in Russ.). DOI: 10.18083/LCAppl.2016.1.9].
3. Беляев В. В. Перспективные применения и технологии жидкокристаллических устройств отображения информации и фотоники // *Жидк. крист. и их практич. использ.* 2015. Т. 15, № 3. С. 7–27. [Belyaev V.V. Promising applications and technologies of liquid crystal displays and photonics devices. *Liq. Cryst. and their Appl.*, 2015. **15** (3), 7–27. (in Russ.). DOI: 10.18083/LCAppl.2015.3.7].
4. Migranov Nail, Kudreyko Aleksey, Kondratyev Denis. Cusp Catastrophe Model for Description of Bistability in Ferroelectric Liquid Crystals. *Physics Research International*, 2014, **2014**, Article ID 294723. 5 p. DOI: 10.1155/2014/294723.
5. Poston T., Stewart I. Catastrophe Theory and Its Applications. Dover, New York, NY, USA, 2006, 512 p.
6. Khoo I.-C., Wu S.T. Optics and Nonlinear Optics of Liquid Crystals. Series in Nonlinear Optics. World Scientific, Singapore, 1993, 440 p.
7. Chigrinov V.G. Liquid Crystal Devices: Physics and Applications. Artech House, Norwood, 1999, 366 p.

Поступила 17.05.2020 г.

Received 17.05.2020

Принята 27.08.2020 г.

Accepted 27.08.2020