

Министерство образования и науки Российской Федерации

Ивановский государственный университет

Математический факультет

Кафедра вычислительной и прикладной математики

Бакалаврская работа

по основной образовательной программе

бакалавриата направления

«МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ»

на тему

*«Численное интегрирование с
использованием
метода Монте-Карло»*

Выполнила:

Терзи Марина

Петровна

студентка

4 курса

дневного отделения

Научный руководитель:

Щаницина Светлана

Валерьевна

Иваново 2010 г.

Автор работы _____ (Терзи М. П.)

Научный руководитель _____ (Щаницина С. В.)

Нормоконтролёр _____ (Иванова Т. П.)

К защите в ГАК допустить

Протокол № _____ от " ____ " _____ 2010г

Заведующий кафедрой _____ (Пухов С. В.)

Оглавление

Введение	4
1 Теоретические основы метода Монте-Карло	6
1.1 Сведения из теории вероятностей и математической статистики	6
1.2 Описание метода Монте-Карло	11
1.2.1 История метода Монте-Карло	11
1.2.2 Сущность метода Монте-Карло	13
1.2.3 Погрешность метода Монте-Карло	15
1.3 Генераторы случайных чисел	17
1.4 Интегрирование с помощью метода Монте-Карло	22
1.4.1 Способ усреднения подынтегральной функции	22
1.4.2 Способ существенной выборки, использующей вспомога- тельную плотность распределения	26
1.4.3 Способ, основанный на истолковании интеграла как площади	28
1.4.4 Способ выделения главной части	30
1.4.5 Вычисление кратных интегралов	32
1.5 Погрешность интегрирования методом Монте-Карло	36
1.5.1 Формула оценки погрешности интегрирования мето- дом Монте-Карло	36
1.5.2 Некоторые способы уменьшения дисперсии	39
2 Численный эксперимент	40
2.1 Алгоритм вычисления интегралов методом Монте-Карло	40
2.2 Программа для вычисления интегралов методом Монте-Карло	42
2.3 Пример 2.1. Интеграл от функции, не имеющей первообраз- ной в классе элементарных функций	44
2.4 Пример 2.2. Двойной интеграл	46
2.5 Пример 2.3. Тройной интеграл. Объем восьмой части шара	47

2.6	Пример 2.4. Тройной интеграл. Объем тела, ограниченного поверхностями	48
2.7	Пример 2.5. Шестикратные интегралы в задаче о взаимном притяжении двух материальных тел	51
	Заключение	54
	Литература	55
	Приложение 1. Таблица равномерно распределенных случайных цифр	56
	Приложение 2. Таблица значений функции $\Phi(t)$	57
	Приложение 3. Код основной программы	58
	Приложение 4. Код модифицированной программы	61

Введение

Методами Монте-Карло называют численные методы решения математических задач при помощи моделирования случайных величин. Однако, решать методами Монте-Карло можно любые математические задачи, а не только задачи вероятностного происхождения, связанные со случайными величинами.

Важнейшим приемом построения методов Монте-Карло является сведение задачи к расчету математических ожиданий. Так как математические ожидания чаще всего представляют собой обычные интегралы, то центральное положение в теории метода Монте-Карло занимают методы вычисления интегралов.

Преимущества недетерминированных методов особенно ярко проявляются при решении задач большой размерности, когда применение традиционных детерминированных методов затруднено или совсем невозможно.

Границы между простым и сложным, возможным и невозможным существуют всегда, но с развитием вычислительной техники сдвигаются вдаль. До появления электронных вычислительных машин (ЭВМ) методы Монте-Карло не могли стать универсальными численными методами, ибо моделирование случайных величин вручную — весьма трудоемкий процесс. Развитию методов Монте-Карло способствовало бурное развитие ЭВМ. Алгоритмы Монте-Карло сравнительно легко программируются и позволяют производить расчеты во многих задачах, недоступных для классических численных методов. Так как совершенствование ЭВМ продолжается, есть все основания ожидать дальнейшего развития методов Монте-Карло и дальнейшего расширения области их применения.

Цель работы — изучение особенностей применения метода Монте-Карло в решении задач численного интегрирования.

Для достижения цели были поставлены следующие задачи:

- 1) изучение теоретических основ метода Монте-Карло (идея метода, алгоритмы расчета, способы оценки погрешности);
- 2) создание электронного информационного ресурса по теме *Численное интегрирование с использованием метода Монте-Карло*;
- 3) создание программы для приближенного вычисления интегралов с использованием метода Монте-Карло;

4) подбор примеров для проведения численного эксперимента.

При изучении теоретических основ метода Монте-Карло были проанализированы одиннадцать источников.

Основные сведения из теории вероятностей и математической статистики, необходимые для понимания метода Монте-Карло, содержатся в [3], [7], [9].

Для моделирования случайных процессов, связанных с применением метода Монте-Карло, необходимы случайные числа; информацию о генераторах случайных чисел можно найти в [4], [5], [6], [7].

Использование метода Монте-Карло для вычисления одномерных интегралов подробно обсуждается в [8].

Наиболее типичный из возможных способов вычисления многократных интегралов методом Монте-Карло описан в [6].

Некоторые способы уменьшения дисперсии, а, следовательно, ошибки интегрирования достаточно развернуто изложены в [4], [6].

Численные методы и программирование в системе MATLAB подробно описаны в [10].

Для проведения численных экспериментов методом Монте-Карло используются некоторые примеры из [1], [2], [11].

В используемой литературе не приводится оценка погрешности вычисления кратных интегралов, в связи с чем в процессе выполнения работы возникла необходимость вывода формулы для оценки этой погрешности.

Изученный материал составляет основу теоретической главы электронного информационного ресурса.

Результаты применения изложенной теории на практике получены с помощью разработанной программы и обсуждаются в главе 2.

Нумерация формул в работе организована следующим образом. Номер состоит из двух чисел, разделенных точкой, первое из которых соответствует номеру главы, а второе – номеру формулы внутри главы. Обозначения в тексте вводятся по мере их возникновения.

Глава 1

Теоретические основы метода Монте-Карло

1.1 Сведения из теории вероятностей и математической статистики

Вероятностным пространством называется тройка $(\Omega, S, P(S))$, где

- 1) Ω – некоторое заданное множество, называемое *пространством элементарных исходов*; его элементы называются также *точками*;
- 2) S – непустое множество подмножеств Ω , являющееся σ -алгеброй, т.е. замкнутым относительно операций суммирования (объединения) счетного числа своих элементов, счетного пересечения и дополнения множеством; предполагается, что Ω (и, следовательно, пустое множество) является элементом S ;
- 3) $P(S)$ – *вероятностная мера*, т.е. неотрицательная функция множеств из S такая, что $P(\Omega) = 1$ и $P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, где A_i – последовательность попарно непересекающихся множеств из S .

Множества A из S называют *событиями*, а величины $P(A)$ – их *вероятностями*.

Вероятность удовлетворяет следующим *условиям*:

- 1) $P(A) \geq 0$;
- 2) $P(\Omega) = 1$;
- 3) $A, B \in S, A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B)$;
- 4) $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$.

Функция $X(\omega), \omega \in \Omega$ называют S -измеримой, если множество $\{\omega : X(\omega) < x\} \in S$ для любого вещественного числа x .

Случайной величиной, определенной на $(\Omega, S, P(S))$, называется произвольная S -измеримая функция $X(\omega)$, принимающая конечные значения.

Для каждой случайной величины $X(\omega)$ однозначно определяется *функция распределения*

$$F_X(x) = P\{\omega : X(\omega) < x\} \quad (F_X(x) = P(X < x)), \quad (1.1)$$

представляющая собой монотонно неубывающую, неотрицательную, непрерывную слева функцию такую, что

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1.$$

Если случайная величина может принимать конечное или счетное число значений, то она называется *дискретной*.

Случайная величина называется *абсолютно непрерывной*, если ее функция распределения представляется в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt,$$

при этом $f(x) = F'(x)$ называется *плотностью вероятности*.

Плотность должна удовлетворять свойствам:

- 1) $f(x) > 0$;
- 2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется число

$$M[X] = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \quad (1.2)$$

где x_i – возможные значения случайной величины X , а p_i – соответствующие им вероятности.

Вероятности p_i ($i = 1, \dots, n$) должны удовлетворять условиям:

- 1) $\forall i \ p_i > 0$;
- 2) $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Чтобы выяснить смысл величины $M[X]$, запишем ее в следующем виде:

$$M[X] = \frac{\sum_{i=1}^n x_i p_i}{\sum_{i=1}^n p_i}.$$

Отсюда видно, что $M[X]$ – это среднее значение величины X , причем более вероятные значения x_i входят в сумму с большими весами.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины называется число

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \quad (1.3)$$

Укажем формулу для *математического ожидания случайной функции*. Пусть по-прежнему случайная величина X имеет плотность вероятностей $f(x)$. Выберем произвольную непрерывную функцию $g(x)$ и рассмотрим случайную величину $Y = g(X)$, которую называют *случайной функцией*. Тогда

$$M[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx. \quad (1.4)$$

Отметим основные свойства математического ожидания: если c – какая-нибудь не случайная величина, X и Y – две любые случайные величины, то

- 1) $M[X + c] = M[X] + c$;
- 2) $M[c \cdot X] = c \cdot M[X]$;

для независимых случайных величин X и Y справедливо:

- 3) $M[X \cdot Y] = M[X] \cdot M[Y]$.

Дисперсия $D[X]$ – это математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее среднего значения $M[X]$:

$$D[X] = M[(X - M[X])^2]. \quad (1.5)$$

Очевидно, $D[X] > 0$.

В случае, если случайная величина дискретная, то

$$D[X] = \sum_{k=1}^n (x_k - M[X])^2 P(X = x_k). \quad (1.6)$$

Если случайная величина непрерывна, то дисперсия

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])^2 f(x) dx. \quad (1.7)$$

Формулу (1.5) для дисперсии можно преобразовать так:

$$D[X] = M[X^2 - 2 \cdot X \cdot M[X] + (M[X])^2] = M[X^2] - 2 \cdot M[X] \cdot M[X] + (M[X])^2,$$

откуда

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2. \quad (1.8)$$

Вычислять дисперсию по этой формуле обычно проще.

Отметим основные свойства дисперсии:

если c — какая-нибудь не случайная величина, то

- 1) $D[X + c] = D[X]$;
- 2) $D[c \cdot X] = c^2 D[X]$;

для независимых случайных величин X и Y справедливо:

- 3) $D[X + Y] = D[X] + D[Y]$.

Случайная величина R , определенная в интервале (a, b) и имеющая плотность $f(x) = \frac{1}{b-a}$, называется *равномерно распределенной* в (a, b) . Известно, что для этой случайной величины математическое ожидание $M[R] = \frac{b+a}{2}$, а дисперсия $D[R] = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Нормальной (гауссовской) случайной величиной называется случайная величина ζ , определенная на всей оси $(-\infty, \infty)$ и имеющая плотность $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, где m и $\sigma > 0$ — числовые параметры, причем математическое ожидание $M[\zeta] = m$, дисперсия $D[\zeta] = \sigma^2$.

Правило трех сигм. Каковы бы ни были m и σ в $f(x)$

$$P\{m - 3\sigma < X < m + 3\sigma\} = 0.997,$$

или

$$\int_{m-3\sigma}^{m+3\sigma} f(x) dx = 0.997.$$

Вероятность 0,997 настолько близка к 1, что иногда последнюю формулу интерпретируют так: при одном испытании практически невозможно получить значение X , отличающееся от $M[X]$ больше чем на 3σ .

Центральная предельная теорема. Если случайные величины X_1, \dots, X_n – независимые и одинаково распределенные, математическое ожидание $M[X_i] = m$ и дисперсия $D[X_i] = \sigma^2$, то

$$\forall t_1 < t_2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ t_1 < \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - m)}{\sqrt{n}\sigma} < t_2 \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (1.9)$$

Выберем $t_2 = -t_1 = t$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - m) \right| < t \sqrt{\frac{D[X]}{N}} \right\} = 2\Phi(t), \quad (1.10)$$

где

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \quad (1.11)$$

Таким образом, при достаточно больших значениях N

$$P \left\{ |\bar{X} - m| < t \sqrt{\frac{D[X]}{N}} \right\} \approx 2\Phi(t). \quad (1.12)$$

Эта формула содержит целое семейство оценок, зависящих от параметра t . Если задать любой коэффициент доверия β , то можно найти (по таблице значений функции Лапласа из приложения) корень $t = t_\beta$ уравнения $2\Phi(t) = \beta$. Тогда вероятность неравенства

$$|\bar{X} - m| < t_\beta \sqrt{\frac{D[X]}{N}} \quad (1.13)$$

приблизительно равна β .

Чаще других используют коэффициенты доверия $\beta = 0.95$, которому отвечает $x_\beta = 1.96$; или $\beta = 0.997$, которому отвечает $x_\beta = 3$ («правило трех сигм»).

1.2 Описание метода Монте-Карло

1.2.1 История метода Монте-Карло

Метод Монте-Карло можно определить как метод моделирования случайных величин с целью вычисления характеристик их распределений. Определение метода можно сделать более общим, говоря не о случайных величинах, а о случайных функциях.

Идея моделирования случайных явлений известна давно и, по мнению некоторых авторов, восходит ко временам Древнего Вавилона и Ветхого Завета. Что же касается использования такого рода явлений для целей приближенных вычислений, то первой работой в этой области принято считать работу Холла 1873 г. о вычислении числа π с помощью случайных бросаний иглы на разграфленную параллельными линиями бумагу. Существуют также ряд более поздних работ, в которых до появления электронных вычислительных машин (ЭВМ) использовались по существу идеи метода Монте-Карло. Однако, до появления ЭВМ этот метод не мог найти сколько-нибудь широкого применения, ибо моделировать случайные величины вручную – очень трудоемкий процесс. Поэтому, идеи эти не получили заметного развития вплоть до 1944 г., когда в связи с работами по созданию атомной бомбы Дж. фон Нейман предложил широко использовать аппарат теории вероятностей для решения прикладных задач с помощью ЭВМ. Первая работа, где этот вопрос систематически излагался, принадлежит Метрополису и Уламу. В Советском Союзе первые статьи о методе Монте-Карло были опубликованы в 1955–1956 годах (Чавчанидзе, Шрейдер).

В настоящее время имеется более двух тысяч работ, где исследуются теоретические основы метода или рассматриваются его применения к конкретным задачам. Метод используется для решения прикладных задач из большого числа областей науки и техники.

Первоначально метод Монте-Карло использовался главным образом для решения задач нейтронной физики, где традиционные численные методы оказались малопригодными. Далее его влияние распространилось на широкий круг задач статистической физики, очень разных по своему содержанию. К разделам науки, где все в большей мере используется метод

Монте-Карло, следует отнести задачи теории массового обслуживания, задачи теории игр и математической экономики, задачи теории передачи сообщений при наличии помех и ряд других.

Метод Монте-Карло оказал и продолжает оказывать существенное влияние на развитие методов вычислительной математики (например, развитие методов численного интегрирования) и при решении многих задач успешно сочетается с другими вычислительными методами и дополняет их. Его применение оправдано в первую очередь в тех задачах, которые допускают теоретико-вероятностное описание. Это объясняется как естественностью получения ответа с некоторой заданной вероятностью в задачах с вероятностным содержанием, так и существенным упрощением процедуры решения.

Наиболее сложными этапами решения той или иной задачи на ЭВМ в настоящее время следует считать математическое описание исследуемого явления, необходимые упрощения задачи, выбор подходящего численного метода, исследование его погрешности и запись алгоритма. В тех случаях, когда имеется теоретико-вероятностное описание задачи, использование метода Монте-Карло может существенно упростить упомянутые промежуточные этапы. Во многих случаях полезно и для задач детерминированных строить вероятностную модель (рандомизовать исходную задачу) с тем, чтобы далее использовать метод Монте-Карло.

Само название «Монте-Карло» происходит от города Монте-Карло в княжестве Монако, знаменитого своим игорным домом. Дело в том, что одним из простейших механических приборов для получения случайных величин является рулетка. Термин «метод Монте-Карло» равнозначен термину «метод статистических испытаний», также принятому в отечественной литературе. В зарубежной литературе обычно говорят о методах Монте-Карло, имея в виду то обстоятельство, что подлежащие вычислению величины могут быть оценены, исходя из различных вероятностных моделей (например, случайные величины с различными законами распределения могут иметь одинаковое среднее значение). Часто, когда речь идет об изучении некоторых реальных явлений, то моделирование связанных с ними случайных величин процессов называют имитацией (simulation).

1.2.2 Сущность метода Монте-Карло

Важнейший прием построения методов Монте-Карло — сведение задачи к расчету математических ожиданий. Пусть требуется найти значение m некоторой изучаемой величины. С этой целью выбирают такую случайную величину X , математическое ожидание которой равно m : $M[X] = m$. Практически же поступают так: вычисляют (разыгрывают) N возможных значений x_i случайной величины X , находят их среднее арифметическое $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$. Так как последовательность одинаково распределенных случайных величин, у которых существуют математические ожидания, подчиняется закону больших чисел, то при $N \rightarrow \infty$ среднее арифметическое этих величин сходится по вероятности к математическому ожиданию. Таким образом, при больших N величина $\bar{x} \approx m$.

В методе Монте-Карло данные вырабатываются искусственно путем использования некоторого генератора случайных чисел в сочетании с функцией распределения вероятностей для исследуемого процесса. Таким генератором может быть таблица, колесо рулетки, подпрограмма ЭВМ или какой-либо другой источник равномерно распределенных случайных чисел. Подлежащее разыгрыванию распределение вероятностей может быть основано на эмпирических данных, извлекаемых из ранее сформированных записей, или на результатах последнего эксперимента либо может представлять собой известное теоретическое распределение.

Таким образом, для применения метода Монте-Карло необходимо уметь разыгрывать случайную величину.

Приведем так называемые правила для разыгрывания случайных величин.

Введем обозначения: R — непрерывная случайная величина, распределенная равномерно в интервале $(0, 1)$; $r_i (i = 1, 2, \dots)$ — случайные числа (возможные значения R).

Правило 1. Для того, чтобы разыграть дискретную случайную величину X , заданную законом распределения

X	x_1	x_2	\dots	x_n
p	p_1	p_2	\dots	p_n

надо:

1. Разбить интервал $(0, 1)$ оси Or на n частичных интервалов;
2. Выбрать (например, из таблицы случайных чисел) случайное число r_i .

Если r_i попало в частичный интервал, то разыгрываемая величина приняла возможное значение x_i .

Правило 2 (Метод обратных функций). Для того чтобы разыграть возможное значение x_i непрерывной случайной величины X , зная ее функцию распределения $F(x)$, надо выбрать случайное число r_i , приравнять его функции распределения и решить относительно x_i полученное уравнение $F(x_i) = r_i$.

Правило 3. Для того, чтобы разыграть возможное значение x_i непрерывной случайной величины X , зная ее плотность вероятности $f(x)$, надо выбрать случайное число r_i и решить относительно x_i уравнение

$$\int_{-\infty}^{x_i} f(x)dx = r_i, \quad (1.14)$$

или уравнение

$$\int_a^{x_i} f(x)dx = r_i. \quad (1.15)$$

где a – наименьшее конечное возможное значение X .

1.2.3 Погрешность метода Монте-Карло

Для оценки величины m смоделируем такую случайную величину X , что ее математическое ожидание $M[X] = m$. Выберем N независимых реализаций x_1, \dots, x_N случайной величины X и вычислим среднее арифметическое

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$$

Предположим дополнительно, что случайная величина X имеет конечную дисперсию

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2.$$

По центральной предельной теореме:

$$P \left\{ |\bar{X} - m| < t_\beta \sqrt{\frac{D[X]}{N}} \right\} \approx 2\Phi(t_\beta) = \beta. \quad (1.16)$$

Величина

$$\varepsilon = t_\beta \sqrt{\frac{D[X]}{N}} \quad (1.17)$$

называется *верхней границей ошибки с коэффициентом доверия β* .

Из формулы (1.17) видно, что для того, чтобы уменьшить ошибку в 10 раз (иначе говоря, чтобы получить в ответе еще один верный десятичный знак), нужно увеличить N в 100 раз.

Задаваясь значениями ε и β при известном $\sigma = \sqrt{D[X]}$ можно определить необходимое число испытаний N , обеспечивающих точность ε с надежностью β :

$$N = \frac{\sigma^2 \cdot t_\beta^2}{\varepsilon^2}. \quad (1.18)$$

Однако при решении конкретных задач обычно величина σ оказывается неизвестной. Поэтому определение приближенного значения σ требует дополнительных рассуждений. В процессе вычисления можно поступить так. Назначается ориентировочно предварительное число испытаний $N = N_0$. Затем по результатам N_0 испытаний определяется приближенное значение дисперсии:

$$S^2 = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} x_i^2 - \left(\frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} x_i \right)^2. \quad (1.19)$$

Располагая S^2 , можно найти приближенное значение N :

$$N = \frac{S^2 \cdot t_{\beta}^2}{\varepsilon^2}. \quad (1.20)$$

Если окажется, что $N > N_0$, необходимо провести дополнительные испытания.

1.3 Генераторы случайных чисел

Для моделирования случайных процессов, связанных с применением метода Монте-Карло, необходимы случайные числа.

Поскольку при вычислениях методом Монте-Карло существенное количество операций расходуется для оперирования над случайными числами, то наличие простых и экономных способов формирования последовательности случайных чисел во многом определяет возможность практического использования этого метода.

В качестве исходной совокупности случайных чисел, используемых для образования случайных элементов различной природы, необходимо выбрать такую совокупность, которая может быть получена с наименьшими, по возможности, затратами машинного времени и, кроме того, обеспечивает простоту и удобство дальнейших преобразований. Обычно считают, что этим требованиям удовлетворяет совокупность случайных чисел с равномерным распределением в интервале $(0, 1)$. Исходя из равномерно распределенных случайных чисел, можно конструировать как случайные события, возникающие с любой заданной вероятностью, так и случайные величины, обладающие практически любым законом распределения.

Напомним основные свойства равномерного распределения. Непрерывная случайная величина R имеет равномерное распределение в интервале (a, b) , если ее функция плотности равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{вне этого интервала.} \end{cases} \quad (1.21)$$

Функция распределения случайной величины R имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b, \\ 1, & \text{при } x > b. \end{cases} \quad (1.22)$$

Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение соответственно равны

$$M[R] = \frac{a+b}{2}, \quad \sigma_R = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \quad (1.23)$$

В частном случае равномерного распределения в интервале $(0, 1)$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{вне этого интервала,} \end{cases} \quad (1.24)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ x & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{при } x > 1, \end{cases} \quad (1.25)$$

а математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение соответственно равны

$$M[R] = \frac{1}{2}, \quad \sigma_R = \frac{1}{2\sqrt{3}}. \quad (1.26)$$

Как правило, в качестве стандартной выбирают непрерывную случайную величину ξ , равномерно распределенную в интервале $(0,1)$. Заметно реже в качестве стандартной используют дискретную случайную величину η , которая с одинаковой вероятностью может принимать 10 значений $0, 1, \dots, 9$. Мы будем называть величину ξ *случайным числом*, а величину η *случайной цифрой*. Иногда η называют *десятичной случайной цифрой*, чтобы отличить ее от двоичной случайной цифры. Чтобы установить связь между ξ и η , разложим число ξ в бесконечную десятичную дробь:

$$\xi = 0.\eta_1\eta_2\dots\eta_k\dots$$

Последняя запись означает, что

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \cdot 10^{-k}.$$

Т е о р е м а. *Десятичные цифры $\eta_1, \dots, \eta_k, \dots$ — случайного числа ξ представляют собой независимые случайные цифры. Обратное, если $\eta_1, \dots, \eta_k, \dots$ — независимые случайные цифры, то $\xi = 0.\eta_1\eta_2\dots\eta_k\dots$ определяет случайное число.*

В вычислениях всегда используют числа с конечным количеством десятичных знаков, поэтому вместо случайных чисел ξ употребляют конечные десятичные дроби $\tilde{\xi} = 0.\eta_1\dots\eta_m$.

Таблицы случайных цифр. Предположим, что мы осуществили N независимых опытов, в результате которых получили N случайных цифр $\eta_1\eta_2\dots\eta_N$. Записав эти цифры (в порядке появления) в таблицу, получим то, что называется таблицей случайных цифр (см. Приложение 1, где цифры

объединены в группы только ради удобства чтения). Способ употребления такой таблицы весьма прост. Если в ходе расчета некоторой задачи нам потребуется случайная цифра η , то мы можем взять любую цифру η_s из этой таблицы. Если нам понадобится случайное число ξ , то мы можем взять из таблицы n очередных цифр и считать, что $\xi = 0.\eta_s\eta_{s+1}\dots\eta_{s+n-1}$. Выбирать цифры из такой таблицы в случайном порядке не обязательно. Их можно выбирать подряд. Но, конечно, можно начинать с любого места, читать в любом направлении, использовать любой заранее заданный алгоритм выбора, не зависящий от конкретных значений цифр таблицы.

Все сказанное выше относится к «идеальной» таблице случайных цифр и не вызывает никаких сомнений. Изготовление хорошей таблицы — весьма сложное дело, ибо в любом реальном опыте всегда возможны ошибки. Проверка «качества» таблицы абсолютно необходима. Для этого существуют тесты для проверки случайных цифр.

В настоящее время таблицы случайных цифр (или более разнообразные таблицы случайных величин) используют главным образом при расчетах вручную; для расчетов на ЭВМ ими практически не пользуются.

Достоинства метода:

- проверка однократная;
- воспроизводить числа можно.

Недостатки метода:

- запас чисел ограничен;
- занимает много места в накопителе или медленно вводится;
- нужна внешняя память.

Ограниченность объема существующих таблиц, — по-видимому, играет второстепенную роль: можно заготовить таблицу любого объема, если это требуется.

Датчики случайных чисел. Чаще всего для построения датчика используют «шумящие» радиоэлектронные приборы (диоды, тиратроны, газотропы и др.). Не вдаваясь в технические подробности, рассмотрим один из возможных способов построения датчика, вырабатывающего случайные двоичные цифры α . Нетрудно представить себе счетчик, который подсчитывает количество ν флуктуаций напряжения шумящего прибора, превышающих заданный уровень E_0 за фиксированное время Δt .

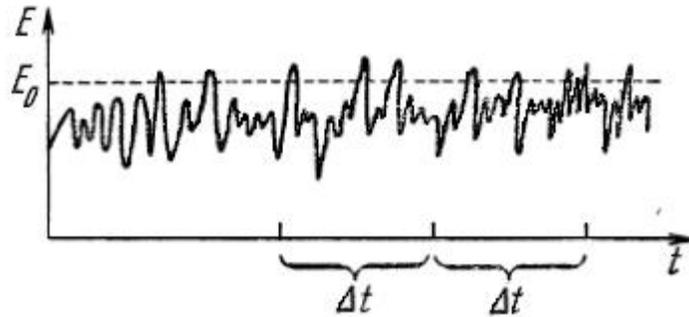


Рис. 1.1: Флуктуации напряжения шумящего прибора

Еще проще устроить счетчик, который выдавал бы число $\nu(mod 2)$, т. е. 0 при четном ν и 1 при нечетном ν . Если вероятности появления 0 и 1 в таком процессе равны между собой, то можно считать, что устройство вырабатывает случайную последовательность двоичных цифр.

Обычно датчики случайных чисел содержат m генераторов описанного типа, работающих независимо, так что датчиком выдается приближенное случайное число $\xi = 0.\alpha_1\dots\alpha_m$, записанное в форме m -разрядной двоичной дроби. Для случайных чисел отведена специальная ячейка в накопителе, и скорость генерирования их столь велика, что на каждом такте работы ЭВМ в этой ячейке получается новое случайное число.

Достоинства метода:

- запас чисел неограничен;
- сверхбыстрое получение;
- места в накопителе не занимает.

Недостатки метода:

- проверка периодическая;
- воспроизводить числа нельзя;
- требуется специальное устройство.

Псевдослучайные числа. Пригодность случайных чисел определяется в конечном счете не процессом их получения, а тем, удовлетворяют ли они некоторым принятым тестам. Но в таком случае совершенно безразлично, как эти числа получены, они могут быть даже сосчитаны по какой-нибудь формуле, лишь бы они удовлетворяли тестам.

Числа $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$, которые вычисляются по какой-либо заданной формуле и могут быть использованы вместо случайных чисел при решении некоторых задач, называются *псевдослучайными числами*.

Большинство алгоритмов, используемых на практике для получения псевдослучайных чисел, представляют собой рекуррентные формулы первого порядка

$$\xi_{n+1} = F(\xi_n), \quad (1.27)$$

где начальное число ξ_0 задано.

Важной чертой алгоритмов вида (1.27) является то, что при реализации их на ЭВМ они всегда порождают периодические последовательности.

Достоинства метода:

- проверка однократная;
- воспроизводить числа можно;
- быстрое получение;
- места в накопителе занимает мало;
- внешние устройства не нужны.

Недостаток – запас чисел ограничен.

Метод псевдослучайных чисел – самый удобный с практической точки зрения. Это подтверждается также всей практикой расчетов методами Монте-Карло.

1.4 Интегрирование с помощью метода Монте-Карло

1.4.1 Способ усреднения подынтегральной функции

Рассмотрим интеграл вида

$$I = \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (1.28)$$

Введем в рассмотрение случайную величину X , распределенную равномерно в интервале интегрирования (a, b) с плотностью $f(x) = \frac{1}{b-a}$. Тогда математическое ожидание

$$M[\varphi(x)] = \int_a^b \varphi(x) f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (1.29)$$

Отсюда

$$\int_a^b \varphi(x) dx = (b-a) M[\varphi(x)]. \quad (1.30)$$

Заменяя математическое ожидание $M[\varphi(x)]$ его оценкой – выборочной средней, получим оценку интеграла (1.28)

$$I_1^* = (b-a) \frac{\sum_{i=1}^N \varphi(x_i)}{N}, \quad (1.31)$$

где x_i – возможные значения случайной величины X , N – число испытаний. Так как случайная величина распределена равномерно в интервале (a, b) с плотностью $f(x) = \frac{1}{b-a}$, то x_i разыгрываются по формуле

$$\frac{1}{b-a} \int_a^{x_i} dx = r_i \quad (1.32)$$

Отсюда $x_i = a + (b-a)r_i$, где r_i – случайное число.

Таким образом, в качестве оценки определенного интеграла (1.28) принимают (1.31).

Дисперсия усредняемой функции $\varphi(X)$ равна

$$\sigma^2 = \int_a^b \varphi^2(x) f(x) dx - (M[\varphi(X)])^2. \quad (1.33)$$

Если точное значение дисперсии вычислить трудно или невозможно, то находят выборочную дисперсию (при $N > 30$),

$$S = \sum_{i=1}^N \frac{u_i^2}{N} - \left(\sum_{i=1}^N \frac{u_i}{N} \right)^2, \quad (1.34)$$

или исправленную дисперсию (при $N < 30$)

$$S = \frac{1}{N-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^N \frac{u_i^2}{N} - \frac{\left(\sum_{i=1}^N u_i \right)^2}{N} \right), \quad (1.35)$$

где $u_i = \varphi(x_i)$.

Эти формулы для вычисления дисперсии применяют и при других способах интегрирования, когда усредняемая функция не совпадает с подынтегральной функцией.

Пример 1.1

Найти:

- а) оценку определенного интеграла $I = \int_1^3 (x+1) dx$;
- б) абсолютную погрешность $|I - I^*|$;
- в) минимальное число испытаний, которые с надежностью 0.95 обеспечат верхнюю границу ошибки 0.1.

Решение. а) Используем формулу

$$I_1^* = (b-a) \frac{\sum_{i=1}^N \varphi(x_i)}{N}.$$

По условию, $a = 1$, $b = 3$, $\varphi(x) = x + 1$. Примем для простоты число испытаний $N = 10$. Тогда оценка $I_1^* = 2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i + 1)}{10}$, где возможные значения x_i разыгрываются по формуле

$$x_i = a + (b - a) \cdot r_i = 1 + 2 \cdot r_i.$$

Результаты десяти испытаний приведены в таблице. Случайные числа r_i взяты из таблицы Приложения 1.

Номер испытания, i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r_i	0.100	0.973	0.253	0.376	0.520	0.135	0.863	0.467	0.354	0.876
$i + 2r_i$	1.200	2.946	1.506	1.752	2.040	1.270	2.726	1.934	1.708	2.752
$x_i + 1$	2.200	3.946	2.506	2.752	3.040	2.270	3.726	2.934	2.708	3.752

Из таблицы находим $\sum_{i=1}^{10} \varphi(x_i) = 29.834$. Искомая оценка

$$I_1^* = 2 \cdot \frac{29.834}{10} = 5.967$$

б) Приняв во внимание, что $I = \int_1^3 (x + 1) dx = 6$, найдем абсолютную погрешность

$$|6 - 5.967| = 0.033$$

в) Найдем дисперсию усредняемой функции $\varphi(X) = X + 1$, учитывая, что случайная величина X в интервале интегрирования $(1, 3)$ распределена равномерно и ее дисперсия

$$D[X] = (3 - 1) \cdot \frac{2}{12} = \frac{1}{3}.$$

$$\sigma^2 = D[X + 1] = D[X] = \frac{1}{3}.$$

Найдем минимальное число испытаний, которые с надежностью 0.95 обеспечат верхнюю границу ошибки $\varepsilon = 0,1$. Из равенства $\Phi(t) = 0.95/2 = 0.475$ по таблице Приложения 2 находим $t = 1.96$. Искомое минимальное число испытаний

$$N = \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{\varepsilon^2} = \frac{1.96^2 \cdot \frac{1}{3}}{0.1^2} = 128.$$

Пример 1.2

В качестве приближенного значения интеграла $I = \int_0^{\pi/2} \cos x dx$ принята оценка (1.31). Найти минимальное число испытаний, при котором с надежностью 0.95 верхняя граница ошибки $\delta = 0.1$.

Решение. Найдем дисперсию усредняемой функции $\varphi(x) = \cos X$, учитывая, что случайная величина X распределена равномерно в интервале $(0, \frac{\pi}{2})$ с плотностью $f(x) = \frac{\pi}{2}$:

$$\sigma^2 = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx - \left(\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \cos x dx \right)^2 = 0.09.$$

Из равенства $\Phi(t) = 0.95/2 = 0.475$ по таблице приложения (2.7) находим $t = 1.96$. Искомое минимальное число испытаний

$$N = \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{\varepsilon^2} = \frac{1,96^2 \cdot 0,09}{0,1^2} = 35.$$

1.4.2 Способ существенной выборки, использующей вспомогательную плотность распределения

Для вычисления интеграла (1.28) введем функцию $f(x)$ - плотность распределения вспомогательной случайной величины X в интервале интегрирования (a, b) , т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = 1. \quad (1.36)$$

Представим (1.28) так

$$I = \int_a^b \frac{\varphi(x)}{f(x)} \cdot f(x)dx. \quad (1.37)$$

I представлен в виде математического ожидания функции $F(X) = \frac{\varphi(X)}{f(X)}$. В качестве оценки этого математического, а следовательно равного ему интеграла (1.28), примем выборочную среднюю

$$I_2^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\varphi(x_i)}{f(x_i)}. \quad (1.38)$$

Отметим, что желательно выбрать $f(x)$ так, чтобы по возможности отношение $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ было постоянным, поскольку в этом случае реализуется минимальная дисперсия, т.е. погрешность будет минимальна ([3], стр. 109.).

Таким образом, в качестве оценки интеграла (1.28) принимают (1.38), где $f(x)$ – плотность распределения вспомогательной случайной величины X , где x_i – возможные значения случайной величины X , которые разыгрываются по формуле $\int_a^{x_i} f(x)dx = r_i$; N – число испытаний.

Пример 1.3

Найти оценку I_2^* интеграла $\int_0^1 e^x dx$.

Решение. Так как $e^x = 1 + x + \dots$, то в качестве плотности распределения вспомогательной случайной величины X примем функцию $f(x) = C \cdot (1 + x)$. Из условия $C \cdot \int_0^1 (1 + x)dx = 1$ находим $C = \frac{2}{3}$. Итак,

$f(x) = \frac{2}{3}(x + 1)$. Запишем интеграл так

$$I = \int_0^1 \frac{e^x}{\frac{2}{3}(x + 1)} \cdot \frac{2}{3}(x + 1) dx.$$

Таким образом, интеграл I представлен в виде математического ожидания функции $\frac{e^x}{\frac{2}{3}(x+1)}$. В качестве искомой оценки примем выборочную среднюю (для простоты ограничимся десятью испытаниями):

$$\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \frac{e^{x_i}}{\frac{2}{3}(x_i + 1)} = 0.15 \sum_{i=1}^{10} \frac{e^{x_i}}{x_i + 1},$$

где x_i – возможные значения X , которые надо разыграть по известной плотности

$$f(x) = \frac{2}{3} \cdot (x + 1).$$

Имеем $\frac{2}{3} \int_0^{x_i} (x + 1) dx = r_i$. Отсюда находим явную формулу для разыгрывания возможных значений X :

$$x_i = \sqrt{1 + 3 \cdot r_i} - 1.$$

Результаты 10 испытаний приведены в следующей таблице:

Номер испытания, i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r_i	0.100	0.973	0.253	0.376	0.520	0.135	0.863	0.467	0.354	0.876
$x_i = \sqrt{1 + 3r_i} - 1$	0.140	0.980	0.326	0.459	0.600	0.185	0.894	0.550	0.436	0.905
e^{x_i}	1.150	2.664	1.385	1.582	1.822	1.203	2.445	1.773	1.546	2.472
$x_i + 1$	1.140	1.980	1.326	1.459	1.600	1.185	1.982	1.550	1.436	1.905
$\frac{e^{x_i}}{x_i + 1}$	1.009	1.345	1.044	1.084	1.139	1.015	1.291	1.118	1.077	1.298

Сложив числа последней строки таблицы, получим $\sum_{i=1}^{10} \frac{e^{x_i}}{x_i + 1} = 11.42$. Таким образом, искомая оценка равна $I_2^* = 0.15 \cdot 11.42 = 1.713$. Заметим, что точное значение интеграла $I = 1,718\dots$

1.4.3 Способ, основанный на истолковании интеграла как площади

Вычислим интеграл (1.28), где подынтегральная функция неотрицательна и ограничена

$$0 \leq \varphi(x) \leq c,$$

исходя из истолкования интеграла как площади. Введем в рассмотрение двумерную случайную величину (X, Y) , распределенную равномерно в прямоугольнике D с основанием $(b-a)$ и высотой c , плотность вероятности которой

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)c} & \text{для точек, принадлежащих } D; \\ 0, & \text{вне } D. \end{cases}$$

Составляющая X распределена в интервале (a, b) равномерно с плотностью распределения $\frac{1}{b-a}$; составляющая Y распределена в интервале $(0, c)$ с плотностью $\frac{1}{c}$. Если разыграно N точек (x_i, y_i) , принадлежащих прямоугольнику D , из которых n точек оказались под кривой, то отношение площади, определяемой интегралом (1.28), к площади прямоугольника D

$$\frac{\int_a^b \varphi(x) dx}{(b-a)c} \approx \frac{n}{N}. \quad (1.39)$$

Отсюда

$$\int_a^b \varphi(x) dx \approx (b-a)c \frac{n}{N}. \quad (1.40)$$

Таким образом, в качестве оценки интеграла (1.28) можно взять

$$I_3^* \approx (b-a)c \frac{n}{N}, \quad (1.41)$$

где N – общее число случайных точек (x_i, y_i) , принадлежащих D ; n – число случайных точек, которые расположены под кривой $y = \varphi(x)$.

Пример 1.4

Найти оценку интеграла $\int_0^2 (4 - x^2) dx$.

Решение. В интервале $(0, 2)$ подынтегральная функция $\varphi(x) = 4 - x^2$ неотрицательна и ограничена, причем $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 4$; следовательно, можно принять $c = 4$.

Введем в рассмотрение двумерную случайную величину (X, Y) , распределенную равномерно в прямоугольнике D с основанием $b - a = 2$ и высотой $c = 4$, плотность вероятности которой $f(x, y) = \frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{8}$. Разыграем $N = 10$ случайных точек (x_i, y_i) , принадлежащих прямоугольнику D . Учитывая, что составляющая X в интервале $(0, 2)$ распределена равномерно с плотностью $f_1(x) = \frac{1}{2}$ и составляющая Y в интервале $(0, 4)$ распределена равномерно с плотностью $f_2(y) = \frac{1}{4}$, разыграем координаты случайной точки (x_i, y_i) , принадлежащей прямоугольнику D , по паре независимых случайных чисел (r_i, R_i) :

$$\frac{1}{2} \cdot \int_0^{x_i} dx = r_i, \quad \frac{1}{4} \cdot \int_0^{y_i} dy = R_i.$$

Отсюда $x_i = 2 \cdot r_i$, $y_i = 4 \cdot R_i$. Если окажется, что $y_i < 4 - x_i^2$, то точка (x_i, y_i) лежит под кривой $Y = \varphi(X)$ и в счетчик n надо добавить единицу. Результаты десяти испытаний приведены в таблице.

Номер испытания, i	r_i	$x_i = 2 \cdot r_i$	x_i^2	$4 - x_i^2$	R_i	$y_i = 4 \cdot R_i$	$y_i < 4 - x_i^2$
1	0.100	0.200	0.040	3.960	0.973	3.892	1
2	0.253	0.506	0.256	3.744	0.376	1.504	1
3	0.520	1.040	1.082	2.918	0.135	0.540	1
4	0.863	1.726	2.979	1.021	0.467	1.868	
5	0.354	0.708	0.501	3.499	0.876	3.504	
6	0.809	1.618	2.618	1.382	0.590	2.360	
7	0.911	1.811	3.320	0.680	0.737	2.948	
8	0.542	1.084	1.175	2.825	0.048	0.192	1
9	0.056	0.112	0.013	3.987	0.489	1.956	1
10	0.474	0.948	0.899	3.101	0.296	1.184	1

Из таблицы находим $n = 6$. Искомая оценка интеграла $I_3^* = (b-a) \cdot c \cdot \frac{n}{N} = 2 \cdot 4 \cdot \frac{6}{10} = 4.8$.

1.4.4 Способ выделения главной части

Пусть требуется вычислить интеграл (1.28). Введем в рассмотрение случайную величину X , распределенную равномерно в интервале интегрирования (a, b) с плотностью $f(x) = \frac{1}{b-a}$. Допустим, что найдена такая функция $g(x)$, которая мало отличается от $\varphi(x)$ и интеграл от которой можно вычислить, не прибегая к методу Монте-Карло. Тогда математическое ожидание функции

$$F(X) = (b - a) [\varphi(X) - g(X)] + \int_a^b g(x) dx \quad (1.42)$$

равно искомому интегралу I .

Действительно, учитывая, что величина X распределена в интервале интегрирования (a, b) равномерно с плотностью $\frac{1}{b-a}$, получим

$$M[F(X)] = (b - a) \int_a^b [\varphi(X) - g(X)] \frac{1}{b - a} dx + \int_a^b g(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx = I.$$

Таким образом, в качестве оценки математического ожидания $M[F(X)]$, а следовательно и интеграла I , можно принять среднее арифметическое N значений функции $F(X)$:

$$I_4^* = \frac{b - a}{N} \sum_{i=1}^N [\varphi(x_i) - g(x_i)] + \int_a^b g(x) dx, \quad (1.43)$$

где x_i – возможные значения X , которые разыгрывают по формуле $x_i = (b - a) \cdot r_i$.

Пример 1.5

Найти оценку I_4^* интеграла $\int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx$.

Решение. Так как $\sqrt{1 + x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \dots$ ($|x| \leq 1$), то примем $g(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$. Тогда, полагая число испытаний $N = 10$, имеем оценку

$$I_4^* = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \left[\sqrt{1 + x_i^2} - \left(1 + \frac{x_i^2}{2} \right) \right] + \int_0^1 \left(1 + \frac{x^2}{2} \right) dx.$$

Выполнив элементарные преобразования, получим

$$I_4^* = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{10} \left[2\sqrt{1+x_i^2} - x_i^2 \right] + \frac{1}{6}.$$

Учитывая, что $a = 0$, $b = 1$, возможные значения x разыграем по формуле

$$x_i = a + (b - a) \cdot r_i = r_i.$$

Результаты вычислений приведены в таблице.

Номер испытания, i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_i = r_i$	0.100	0.973	0.253	0.376	0.520	0.135	0.863	0.467	0.354	0.876
x_i^2	0.010	0.947	0.064	0.141	0.270	0.018	0.745	0.218	0.125	0.767
$1 + x_i^2$	1.010	1.947	1.064	1.141	1.270	1.018	1.745	1.218	1.125	1.767
$\sqrt{1 + x_i^2}$	1.005	1.395	1.032	1.068	1.127	1.009	1.321	1.104	1.061	1.329
$2\sqrt{1 + x_i^2} - x_i^2$	2.000	1.843	2.000	1.995	1.984	2.000	1.897	1.990	1.997	1.891

Сложив числа последней строки таблицы, найдем сумму 19.597. Таким образом, получим искомую оценку интеграла $I_4^* = \frac{19,597}{20} + \frac{1}{6} = 1.145$. Заметим, что точное значение $I = 1.147$.

1.4.5 Вычисление кратных интегралов

Пусть функция $y = f(x_1, \dots, x_m)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области G и требуется вычислить m -кратный интеграл I по области G :

$$I = \int \cdots \int_G f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m. \quad (1.44)$$

Геометрически число I представляет собой $(m + 1)$ -мерный объем вертикального цилиндрического тела в пространстве $Ox_1x_2 \dots x_my$, построенного на основании G и ограниченного сверху данной поверхностью $y = f(x)$, где $x = (x_1, \dots, x_m)$.

Преобразуем интеграл так, чтобы новая область интегрирования Ω целиком содержалась внутри единичного m -мерного куба. Пусть область интегрирования G расположена в m -мерном параллелепипеде $a_k \leq x_k \leq b_k$ ($k = 1, \dots, m$).

Сделаем замену переменных

$$x_k = a_k + (b_k - a_k)\xi_k \quad (k = 1, \dots, m). \quad (1.45)$$

Тогда m -мерный параллелепипед преобразуется в m -мерный единичный куб $0 \leq \xi_k \leq 1$ ($k = 1, \dots, m$), и, следовательно, новая область интегрирования Ω будет целиком расположена внутри этого единичного куба.

Вычислим якобиан преобразования:

$$\frac{D(x_1, \dots, x_m)}{D(\xi_1, \dots, \xi_m)} = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 - a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_m - a_m \end{vmatrix} = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \dots \cdot (b_m - a_m). \quad (1.46)$$

Таким образом,

$$I = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \dots \cdot (b_m - a_m) \cdot J, \quad (1.47)$$

где

$$J = \int \cdots \int_{\Omega} f[a_1 + (b_1 - a_1)\xi_1, \dots, a_m + (b_m - a_m)\xi_m] d\xi_1 \dots d\xi_m \quad (1.48)$$

и область интегрирования Ω содержится внутри m -мерного единичного куба

$$0 \leq \xi_k \leq 1 \quad (k = 1, \dots, m). \quad (1.49)$$

Пусть

$$F(\xi_1, \dots, \xi_m) = f[a_1 + (b_1 - a_1)\xi_1, \dots, a_m + (b_m - a_m)\xi_m]. \quad (1.50)$$

Выберем N равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$ последовательностей случайных чисел:

$$\begin{array}{cccc} \xi_1^{(1)} & \xi_2^{(1)} & \dots & \xi_m^{(1)}; \\ \xi_1^{(2)} & \xi_2^{(2)} & \dots & \xi_m^{(2)}; \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_1^{(N)} & \xi_2^{(N)} & \dots & \xi_m^{(N)}. \end{array} \quad (1.51)$$

Рассмотрим случайные точки $M_i(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}, \dots, \xi_m^{(i)})$. Выбрав достаточно большое N число точек M_1, \dots, M_N проверяем, какие из них принадлежат области Ω . Пусть n точек принадлежат области Ω .

Заметим, что относительно границы области Ω следует заранее договориться, причисляются ли граничные точки, или часть их, к области Ω , или не причисляются к ней. В общем случае при гладкой границе это не имеет существенного значения; в отдельных случаях нужно решать вопрос с учетом конкретной обстановки.

Взяв достаточно большое n точек M_i , F_{cp} приближенно можно положить равным:

$$\tilde{F}_{\text{cp}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(M_i); \quad (1.52)$$

откуда оценка интеграла J выражается формулой

$$\tilde{J} = \tilde{F}_{\text{cp}} \cdot \Omega, \quad (1.53)$$

где под Ω понимается m -мерный объем области интегрирования Ω . Если вычисление объема Ω затруднительно, то можно принять $\tilde{\Omega} = \frac{n}{N}$ (из определения геометрической вероятности).

Таким образом, имеем оценку \tilde{I} искомого интеграла I :

$$\tilde{I} = V \cdot \tilde{F}_{\text{cp}} \cdot \tilde{\Omega}, \quad (1.54)$$

где $V = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_m - a_m)$ – объем параллелепипеда, ограничивающего исходную область интегрирования G . Отсюда получаем

$$\tilde{I} = \frac{V}{N} \sum_{i=1}^n F(M_i). \quad (1.55)$$

В частном случае, когда Ω есть единичный куб, проверка принадлежности точек M_i области Ω становится излишней, то есть $n = N$ и мы имеем

$$\tilde{I} = \frac{V}{N} \sum_{i=1}^N F(M_i). \quad (1.56)$$

Пример 1.6

Вычислить интеграл $\int_0^1 dx \int_x^1 (x+y) dy$. Произвести 10 испытаний.

Решение. Область интегрирования ограничена линиями $y = x$, $x = 1$, $x = 0$ и, очевидно, принадлежит единичному квадрату. Площадь области интегрирования (прямоугольного треугольника)

$$S = \frac{1 \cdot 1}{2} = 0.5.$$

Используем формулу

$$I_1^* = S \cdot \frac{\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i)}{n},$$

где n – число случайных точек (x_i, y_i) , которые принадлежат области интегрирования; у этих точек $y_i > x_i$ (при каждом испытании, в котором это условие выполняется в счетчик n записывают единицу). Пары независимых случайных чисел (x_i, y_i) берем из таблицы приложения 1, начиная с первой строки сверху. Результаты 10 испытаний приведены в следующей таблице.

Номер испытания, i	x_i	y_i	Счетчик $y_i \geq x_i$	$f(x_i, y_i) = x_i + y_i$
1	0.100	0.973	0.253	0.376
2	0.100	0.973	1	1.073
3	0.520	0.135		
4	0.863	0.467		
5	0.354	0.876	1	1.230
6	0.809	0.590		
7	0.911	0.737		
8	0.542	0.048		
9	0.056	0.489	1	0.545
10	0.474	0.296		
\sum			4	3.477

Из таблицы находим $n = 4$, $\sum_{i=1}^4 f(x_i, y_i) = 3.477$. Подставив эти числа в формулу, получим искомую оценку:

$$I_1^* = 0.5 \cdot \frac{3.477}{4} = 0.435.$$

Сравнительно большое расхождение полученной оценки с точным значением $I = 0.5$ объясняется малым числом испытаний.

1.5 Погрешность интегрирования методом Монте-Карло

1.5.1 Формула оценки погрешности интегрирования методом Монте-Карло

Итак, для оценки интеграла

$$I = \int \cdots \int_G f(x_1, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \dots dx_m$$

имеем формулу

$$\tilde{I} = V \cdot \tilde{F}_{\text{cp}} \cdot \tilde{\Omega},$$

где V – объем параллелепипеда, ограничивающего область интегрирования G ;

$\tilde{\Omega}$ – объем новой области интегрирования Ω , полученной после замены переменных (1.45);

\tilde{F}_{cp} – оценка среднего значения подынтегральной функции, полученной после замены переменных (1.45). Оценим погрешность интегрирования.

Из теории погрешностей известна формула оценки погрешности произведения двух величин:

$$\Delta I = \Delta(V \cdot \tilde{F}_{\text{cp}} \cdot \tilde{\Omega}) = V \cdot \left(\Delta F_{\text{cp}} \cdot \tilde{\Omega} + \Delta \Omega \cdot \left| \tilde{F}_{\text{cp}} \right| \right). \quad (1.57)$$

По центральной предельной теореме

$$P \left\{ \left| F_{\text{cp}} - \tilde{F}_{\text{cp}} \right| \leq t_\beta \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}} \right\} \approx \beta;$$

$$P \left\{ \left| \Omega - \tilde{\Omega} \right| \leq t_\beta \sqrt{\frac{\sigma_2^2}{N}} \right\} \approx \beta;$$

т.е. с вероятностью β

$$\Delta F_{\text{cp}} = t_\beta \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}}, \quad \Delta \Omega = t_\beta \sqrt{\frac{\sigma_2^2}{N}};$$

при этом

$$\tilde{F}_{\text{cp}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(M_i), \quad \tilde{\Omega} = \frac{n}{N}.$$

Подставим значения погрешностей в формулу (1.57).

$$\Delta I = V \cdot \left(t_\beta \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}} \cdot \tilde{\Omega} + t_\beta \sqrt{\frac{\sigma_2^2}{N}} \cdot \left| \tilde{F}_{\text{cp}} \right| \right). \quad (1.58)$$

Выполнив элементарные преобразования, при известных значениях σ_1 и σ_2 , для оценки погрешности имеем формулу

$$\Delta I = V \cdot t_\beta \left(\sigma_1 \cdot \frac{\tilde{\Omega}}{\sqrt{n}} + \sigma_2 \cdot \frac{\left| \tilde{F}_{\text{cp}} \right|}{\sqrt{N}} \right). \quad (1.59)$$

Однако, обычно при решении конкретных задач величины σ_1^2 и σ_2^2 оказываются неизвестными. Тогда их приближенные значения вычисляют по формулам

$$S_1^2 = (\tilde{F}^2)_{\text{cp}} - \left(\left| \tilde{F}_{\text{cp}} \right| \right)^2, \\ S_2^2 = \tilde{\Omega} \cdot (1 - \tilde{\Omega}),$$

где

$$\tilde{F}_{\text{cp}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(M_i), \quad (\tilde{F}^2)_{\text{cp}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F^2(M_i), \quad \tilde{\Omega} = \frac{n}{N}.$$

Тогда для оценки погрешности имеем формулу

$$\Delta I = V \cdot t_\beta \left(S_1 \cdot \frac{\tilde{\Omega}}{n} + S_2 \cdot \frac{\left| \tilde{F}_{\text{cp}} \right|}{\sqrt{N}} \right). \quad (1.60)$$

Так как из того, что $\tilde{\Omega} = \frac{n}{N}$ следует, что $n = \tilde{\Omega} \cdot N$, то

$$\Delta I = V \cdot t_\beta \left(\frac{S_1 \sqrt{\tilde{\Omega}}}{\sqrt{N}} + \frac{S_2 \left| \tilde{F}_{\text{cp}} \right|}{\sqrt{N}} \right). \quad (1.61)$$

При достаточно большом N , а следовательно и n , $\tilde{F}_{\text{cp}} \rightarrow F_{\text{cp}}$ и $\tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ (а F_{cp} и Ω не зависят от N). Предположим, что величина

$$V \cdot t_\beta \left(S_1 \sqrt{\tilde{\Omega}} + \left| \tilde{F}_{\text{cp}} \right| S_2 \right)$$

с ростом N изменяется незначительно (принимает приблизительно одно и то же значение). Обозначим $c = V \cdot t_\beta \left(S_1 \sqrt{\tilde{\Omega}} + \left| \tilde{F}_{\text{cp}} \right| S_2 \right)$. Тогда погрешность $\Delta = \frac{c}{\sqrt{N}}$. Если полученная погрешность Δ велика, то мы назначаем желаемую погрешность (точность) Δ' . Тогда количество испытаний N' , необходимое для достижения указанной точности приближенно можно положить равным $N' = \left(\frac{c}{\Delta'} \right)^2$ и вычислить значение интеграла с новым количеством испытаний.

1.5.2 Некоторые способы уменьшения дисперсии

Количество испытаний, необходимое для вычисления интеграла с заданной точностью, зависит, как было показано выше, от дисперсии соответствующей случайной величины. Существуют различные приемы преобразования задачи, позволяющие уменьшать дисперсию и, следовательно, время вычислений.

Если часть задачи можно решить аналитически, то, используя это частичное решение, обычно удается построить метод Монте-Карло для решения всей задачи с меньшей дисперсией. Правда, вообще говоря, построенные таким путем методы могут оказаться более трудоемкими и в конечном счете невыгодными. Мы будем говорить об аналитическом интегрировании, хотя в некоторых случаях такую же роль может сыграть численное интегрирование, если точность этого интегрирования значительно выше, чем точность метода Монте-Карло.

Выделение главной части

Если главную часть задачи можно вычислить аналитически, то, как правило, выгодно считать методом Монте-Карло не всю задачу, а только «поправку» — разницу между всей задачей и главной частью. Уменьшение дисперсии при этом может оказаться очень значительным.

Интегрирование по части области

Допустим, что мы умеем (аналитически) вычислить интегралы по некоторой части области G . Тогда выгодно представить интеграл в виде суммы интегралов по областям B и $G - B$, и методом Монте-Карло вычислить только интеграл по области $G - B$. Чем область B больше, тем заметнее будет понижение дисперсии.

Интегрирование по части переменных (понижение порядка интеграла)

Если аналитически взять интеграл по некоторым из переменных, а по остальным переменным использовать тот же метод Монте-Карло, то дисперсия уменьшится. Правда, нередко бывает, что после интегрирования по некоторым из переменных получаются более сложные формулы счета и, несмотря на уменьшение дисперсии, трудоемкость возрастает.

Глава 2

Численный эксперимент

2.1 Алгоритм вычисления интегралов методом Монте-Карло

1. Задаем область интегрирования с помощью неравенств; параметр t_β , соответствующий коэффициенту доверия β ; подынтегральную функцию $f(x_1, \dots, x_m)$; количество испытаний N .
2. Подбираем такие $a_i, b_i (i = \overline{1, m})$, что $a_i \leq x_i \leq b_i (i = 1, \dots, m)$, т.е. задаем векторы $\vec{a} = [a_1, \dots, a_m]$ и $\vec{b} = [b_1, \dots, b_m]$. Вычисляем объем параллелепипеда, ограничивающего область интегрирования, по формуле $V = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_m - a_m)$.
3. Фиксируем $n = 0$, $\text{sumF} = 0$, $\text{sumF2} = 0$.
4. Для k от 1 до N :
 - 4.1. генерируем случайные точки $(\xi_1^{(k)}, \dots, \xi_m^{(k)})$, , такие что $0 \leq \xi_i^{(k)} \leq 1, i = \overline{1, m}$;
 - 4.2. вычисляем $x_i^{(k)} = a_i + (b_i - a_i)\xi_i^{(k)} i = \overline{1, m}$;
 - 4.3 если для $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_m^{(k)})$ выполняются неравенства, задающие область интегрирования, то
 - 4.3.1. $\text{fx} = f(x^{(k)})$
 - 4.3.2. $n = n + 1$;
 - 4.3.3. $\text{sumF} = \text{sumF} + \text{fx}$;

$$4.3.4. \quad \text{sumF2} = \text{sumF2} + \text{fx}^2;$$

5. Вычисляем $\tilde{F}_{\text{cp}} = \frac{1}{n} \text{sumF}$, $(\tilde{F}^2)_{\text{cp}} = \frac{1}{n} \text{sumF2}$, $\tilde{\Omega} = \frac{n}{N}$.

6. Вычисляем значение интеграла по формуле $\tilde{I} = V \cdot \tilde{F}_{\text{cp}} \cdot \tilde{\Omega}$.

7. Находим приближенные значения дисперсий $S_1^2 = (\tilde{F}^2)_{\text{cp}} - (\tilde{F}_{\text{cp}})^2$, $S_2^2 = \tilde{\Omega} \cdot (1 - \tilde{\Omega})$.

8. Вычисляем значение погрешности $\Delta = V \cdot t_\beta \cdot \left(\frac{\tilde{\Omega} \cdot S_1}{\sqrt{n}} + \frac{|\tilde{F}_{\text{cp}}| \cdot S_2}{\sqrt{N}} \right)$.

9. Если погрешность Δ – велика, то задаем новую погрешность ε и вычисляем N' – ориентировочное количество испытаний, необходимое для достижения указанной точности ε , по формуле

$$N' = \left[\left(\frac{c}{\varepsilon} \right)^2 \right] + 1,$$

где $c = V \cdot t_\beta \cdot \left(S_1 \sqrt{\tilde{\Omega}} + S_2 \cdot |\tilde{F}_{\text{cp}}| \right)$, $[]$ – означает целую часть числа. Выполняем пункты 3 - 7 с полученным необходимым количеством испытаний N' .

2.2 Программа для вычисления интегралов методом Монте-Карло

Основываясь на приведенном подробном алгоритме вычисления интегралов методом Монте-Карло, в среде MATLAB (версии 7.5.0) написана программа для проведения численных экспериментов. Система MATLAB представляет собой уникальный сплав универсальных программных и алгоритмических средств с широкой гаммой специализированных приложений. Входной язык и среда программирования MATLAB очень близки к современным системам визуального программирования на базе универсальных алгоритмических языков типа Basic, C++, Java, Object Pascal. По ряду аспектов MATLAB уступает указанным системам (режим интерпретации, небольшой запас визуальных компонентов). Однако с его библиотекой численных методов ни по объему, ни по качеству не может сравниться ни одна из систем программирования.

Многие учебные заведения в России и за рубежом используют MATLAB для подготовки специалистов различного профиля. Для современного научно-технического работника и инженера MATLAB является незаменимым инструментом моделирования и исследования различных прикладных систем. Использование MATLAB в учебном процессе позволяет сблизить дисциплины, связанные с информатикой и численными методами, которые зачастую читаются автономно.

Написанная программа является модифицируемой. Прежде чем запустить программу, в файле `Dannie.m` пользователь вводит исходные данные в указанных комментариями областях кода. Исходными данными программы являются:

1. параметр t_β , соответствующий коэффициенту доверия β ;
2. вектор начал сторон параллелепипеда, ограничивающего исходную область интегрирования, который задается в виде $a = [a_1, a_2, \dots, a_m]$ (m – кратность интеграла);
3. вектор концов сторон параллелепипеда, ограничивающего исходную область интегрирования, который задается в виде $b = [b_1, b_2, \dots, b_m]$;
4. область интегрирования в виде неравенств, задающихся с помощью переменных интегрирования $x(1), x(2), \dots, x(m)$;

5. подынтегральная функция, как $f x = f x(x(1), x(2), \dots, x(m))$.

Наиболее часто используемые параметры t_β и соответствующие уровни надежности (коэффициенты доверия) β приведены в следующей таблице.

параметр t_β	коэффициент доверия β
3	0.997
1.96	0.95

Для других значений коэффициента доверия β соответствующее значение параметра t_β находят по таблице функции $\Phi(t)$, приведенной в Приложении 2.

Для проведения численного эксперимента запускается файл `Integrirovanie.m`. При запуске программа запрашивает необходимое количество испытаний для проведения эксперимента и выдает значение интеграла и погрешность его вычисления. Если желаемая точность не достигнута, то пользователь вводит необходимую ему точность результата и получает значение интеграла с заданной точностью.

Код написанной программы приведен в Приложении 3.

Для проведения численного эксперимента в программу был добавлен вывод промежуточных контрольных значений $(\tilde{F}_{\text{ср}}, \Delta F_{\text{ср}}, \tilde{\Omega}, \Delta \Omega, c)$. При проверке работоспособности выведенной формулы оценки погрешности численного интегрирования в программе был реализован цикл вычислений со значениями количества испытаний N от 10^3 до 10^7 с увеличением N в 10 раз на каждой итерации цикла. Для проведения численного эксперимента в этом случае запускается файл `IntegrirovanieModif.m`.

Код модифицированной программы приведен в Приложении 4.

Результаты работы программы отражены в примерах и далее подробно описаны.

2.3 Пример 2.1. Интеграл от функции, не имеющей первообразной в классе элементарных функций

С помощью составленной программы рассчитаем методом Монте-Карло известный аналитически не берущийся интеграл

$$\Phi(3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^3 e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (2.1)$$

Функция $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ табулирована (см. Приложения 2). При решении задач методом Монте-Карло эта функция используется для определения параметра t_β при заданном коэффициенте доверия β по формуле $2\Phi(t_\beta) = \beta$. В этом примере выбран параметр $t_\beta = 3$, соответствующий "правилу трех сигм". По таблице находим $\Phi(3) = 0.49865$. Вычислим значение $\Phi(3)$ методом Монте-Карло и сравним результат с табличным значением. Напомним:

N – количество испытаний;

I – значение интеграла; Δ – погрешность;

$\tilde{F}_{\text{ср}}$ – среднее значение подынтегральной функции;

$\tilde{\Omega}$ – приближенный объем области интегрирования полученной после замены переменных;

$\Delta F_{\text{ср}}$ – ошибка вычисления среднего значения функции;

$\Delta\Omega$ – ошибка вычисления объема области интегрирования;

c – величина, которая в п. 1.5.1 предполагалась изменяющейся незначительно.

Эти же обозначения будем использовать и при иллюстрации следующих примеров.

Результаты работы программы приведем в следующей таблице.

N	\tilde{I}	Δ	$\tilde{F}_{\text{ср}}$	$\tilde{\Omega}$	$\Delta\tilde{F}_{\text{ср}}$	$\Delta\Omega$	c
10^3	0.49621	0.04	0.16540	1	0.01319	0	1.25083
10^4	0.49969	0.02	0.16657	1	0.00415	0	1.25024
10^5	0.49862	0.004	0.16621	1	0.00132	0	1.25277
10^6	0.49827	0.002	0.16609	1	0.00042	0	1.25285
10^7	0.49863	0.0004	0.16621	1	0.00013	0	1.25337

Т.к. область интегрирования (полученная после замены переменных (1.45)) и ограничивающий его прямоугольник совпадают, то величина $\tilde{\Omega} = 1$ и $\Delta\Omega = 0$. Поскольку $\Delta\Omega = 0$, то величина погрешности интеграла изменяется пропорционально величине погрешности вычисления $\tilde{F}_{\text{ср}}$, которая уменьшается в 10 раз при увеличении N в 100 раз. Наилучший результат достигается при $N = 10^7$; верных цифр при этом равно 4, хотя оценка погрешности гарантирует лишь 3 верные цифры после запятой. Отметим, что при $N = 10^5$ результат почти такой же; количество верных цифр в значении интеграла также равно 4, т.е. оценка погрешности в этом случае более завышена. Как и предполагалось, значение c меняется незначительно, $c \approx 1.25$.

2.4 Пример 2.2. Двойной интеграл

Вычислим методом Монте-Карло интеграл

$$\int_0^2 dx \int_{x^2}^{2x} (x+y) dy \quad (2.2)$$

и сравним результат работы программы с аналитическим значением интеграла

$$\frac{52}{15} = 3.4(6).$$

N	\tilde{I}	Δ	$\tilde{F}_{\text{ср}}$	$\tilde{\Omega}$	$\Delta\tilde{F}_{\text{ср}}$	$\Delta\Omega$	c
10^3	3.35998	1.2	2.67514	0.1570	0.32710	0.03451	36.34891
10^4	3.39984	0.36	2.57564	0.1650	0.10090	0.01114	36.21483
10^5	3.488625	0.12	2.60246	0.1675	0.03173	0.00345	36.76507
10^6	3.47595	0.037	2.60472	0.1668	0.01008	0.00109	36.74984
10^7	3.46782	0.012	2.59979	0.1667	0.00318	0.00035	36.65983

По таблице видно, что при увеличении количества испытаний в 100 раз, погрешность уменьшается в 10 раз. Величины $\tilde{\Omega}$ и $\tilde{F}_{\text{ср}}$ изменяются незначительно с ростом N , а их погрешности $\Delta\Omega$ и $\Delta\tilde{F}_{\text{ср}}$ уменьшаются приблизительно как $\frac{1}{\sqrt{N}}$. Отметим, что погрешность $\Delta\Omega$ на порядок меньше, чем погрешность $\Delta\tilde{F}_{\text{ср}}$, но и сама величина $\tilde{\Omega}$ на порядок меньше, т.е. относительные погрешности обоих сомножителей приблизительно одинаковы, и потому каждый из них примерно одинаково влияет на величину погрешности интегрирования. Наилучший результат вычисления интеграла достигается при $N = 10^7$. Оценка погрешности гарантирует 1 верную цифру после запятой, хотя по сравнению с точным значением мы имеем 2. Поэтому оценка погрешности по выведенной формуле может быть завышенной. Также видно, что значение c меняется незначительно.

2.5 Пример 2.3. Тройной интеграл. Объем восьмой части шара

Дан шар с центром в начале координат и радиусом $R = 2$. Вычислить методом Монте-Карло объем части шара, расположенной в первом октанте, т.е. вычислим тройной интеграл

$$V = \iiint_G dx dy dz, \quad (2.3)$$

где $G = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. Результат сравнить с аналитическим значением $V = \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi R^3}{3} = 4.18879020\dots$

N	\tilde{I}	Δ	\tilde{F}_{cp}	$\tilde{\Omega}$	ΔF	$\Delta\Omega$	c
10^3	4.1520	0.4	1	0.5190	0	0.04740	11.99133
10^4	4.1944	0.2	1	0.5243	0	0.01498	11.98582
10^5	4.1966	0.04	1	0.5246	0	0.00474	11.98550
10^6	4.1922	0.02	1	0.5240	0	0.00150	11.98614
10^7	4.1871	0.004	1	0.5233	0	0.00047	11.98587

Из таблицы видно, что при увеличении количества испытаний N в 100 раз, погрешность Δ уменьшается в 10 раз. Так как подынтегральная функция равна 1, то $\tilde{F}_{\text{cp}} = 1$ и $\Delta F = 0$. Значит погрешность вычисления интеграла пропорциональна величине погрешности вычисления $\tilde{\Omega}$. Как и предполагалось, значение c меняется незначительно, $c \approx 11.99$. Наилучший результат достигается при $N = 10^7$. Количество верных цифр при этом равно 2, что соответствует количеству верных цифр, получаемому по сравнению с точным решением.

2.6 Пример 2.4. Тройной интеграл. Объем тела, ограниченного поверхностями

Требуется найти объем v тела

$$V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - 1 \leq z^2 \leq \frac{3}{5}(x^2 + y^2 + 1)\}, \quad (2.4)$$

т.е. вычислить интеграл

$$\iiint_V dx dy dz. \quad (2.5)$$

Рассмотрим аналитическое решение задачи.

Поверхность S_1 , описываемая уравнением $x^2 + y^2 - 1 = z^2$ — это однополостный гиперболоид с осью симметрии OZ .

Поверхность $S_2 : \frac{3}{5}(x^2 + y^2 + 1) = z^2$ — это двуполостный гиперболоид с осью симметрии OZ .

Поверхности S_1 и S_2 пересекаются по линиям, описываемым уравнениями $x^2 + y^2 = 4$ и $z = \pm\sqrt{3}$.

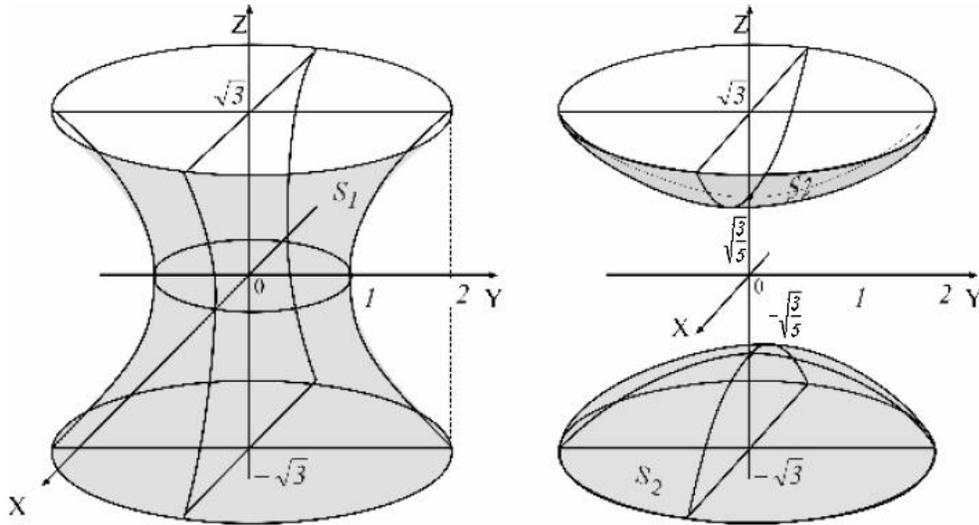


Рис. 2.1: Однополостный (слева) и двуполостный (справа) гиперболоиды

Тело симметрично относительно плоскостей XOY , XOZ , YOZ , поэтому $v = 8 \cdot v_1$, где v_1 — объем тела V_1 — части V , расположенной в первом октанте.

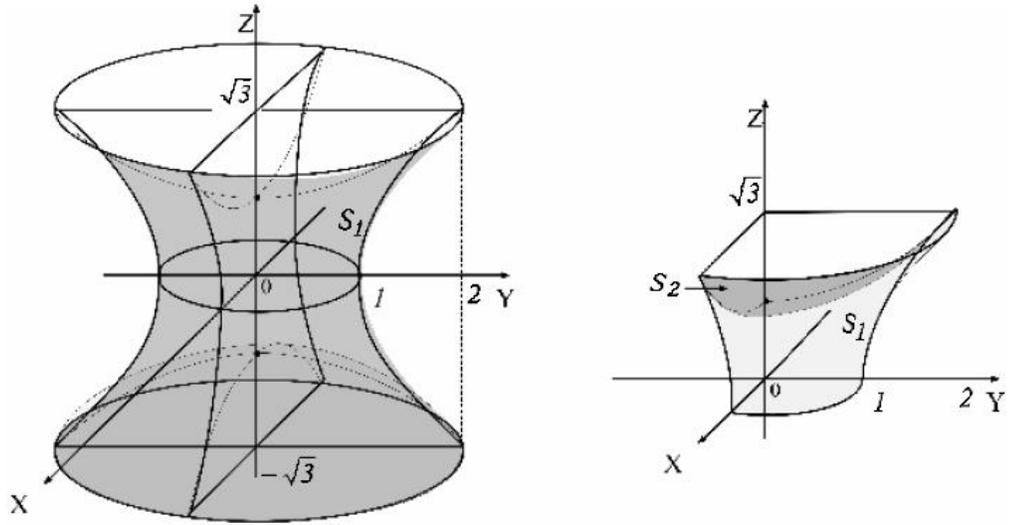


Рис. 2.2: Тела V (слева) и V_1 (справа)

Тело V_1 проектируется на четверть круга D_1 и четверть кольца D_2 .
Над D_1 имеем

$$0 \leq z \leq \sqrt{\frac{3}{5}(x^2 + y^2 + 1)},$$

над D_2 :

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 1} \leq z \leq \sqrt{\frac{3}{5}(x^2 + y^2 + 1)}.$$

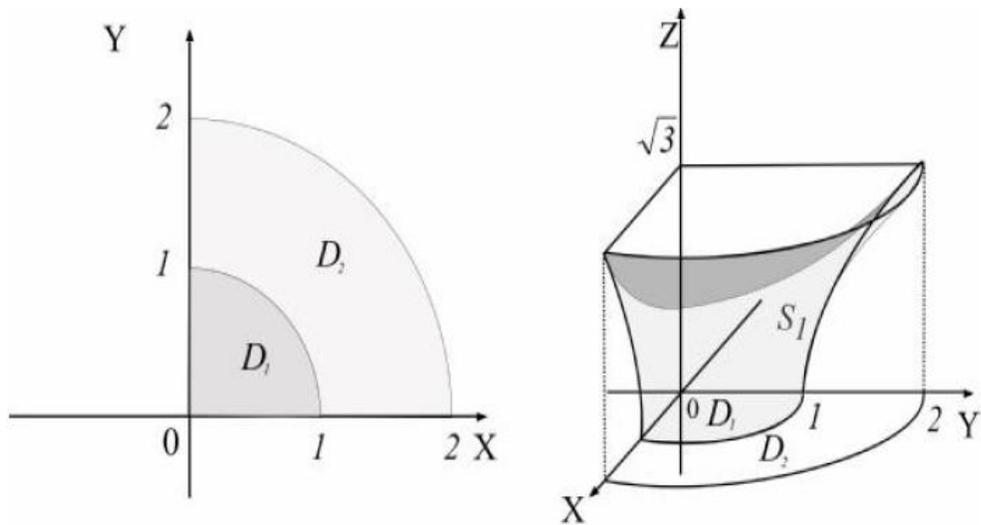


Рис. 2.3: Проекция тела V_1 на плоскость XOY (слева), тело V_1 (справа)

Получаем:

$$v = 8 \left(\iint_{D_1} \left[\int_0^{\sqrt{\frac{3}{5}(x^2+y^2+1)}} dz \right] dxdy + \iint_{D_2} \left[\int_{\sqrt{x^2+y^2-1}}^{\sqrt{\frac{3}{5}(x^2+y^2+1)}} dz \right] dxdy \right),$$

или

$$v = 8 \left(\iint_{D_1} \sqrt{\frac{3}{5}(x^2+y^2+1)} dxdy + \iint_{D_2} \left[\sqrt{\frac{3}{5}(x^2+y^2+1)} - \sqrt{x^2+y^2-1} \right] dxdy \right).$$

Перейдя в последних интегралах к полярным координатам будем иметь значение интеграла

$$v = 8 \cdot \left(\frac{1}{3} \sqrt{3} \pi - \frac{1}{30} \sqrt{15} \pi \right) = 8 \cdot 1.408221497 = 11.265771976.$$

Как видно, вычисления очень громоздкие. Для вычисления же объема V методом Монте-Карло не нужно выполнять никаких построений, а достаточно знать только задание тела с помощью неравенств.

Приведем результаты работы программы в виде таблицы.

N	\tilde{I}	Δ	$\tilde{F}_{\text{ср}}$	$\tilde{\Omega}$	ΔF	$\Delta \Omega$	c
10^3	10.5863	2.1	1	0.1910	0	0.03729	65.3616
10^4	11.4288	0.68	1	0.2062	0	0.01214	67.2716
10^5	11.4637	0.21	1	0.2068	0	0.00384	67.3475
10^6	11.3052	0.068	1	0.2040	0	0.00148	67.0008
10^7	11.2744	0.021	1	0.2034	0	0.00038	66.9328

Из таблицы просматривается закономерность, что при увеличении количества испытаний N в 100 раз, погрешность Δ уменьшается в 10 раз. Так как подынтегральная функция равна 1, то $\tilde{F}_{\text{ср}} = 1$ и $\Delta F = 0$. Как и предполагалось, значение c меняется незначительно. Наилучший результат достигается при $N = 10^7$. Количество верных цифр, гарантируемое сравнительно с точным значением, совпадает с количеством верных цифр, гарантируемым оценкой погрешности по выведенной формуле.

Таким образом, при достаточно большом N можно получить результат с желаемой точностью без определения пределов интегрирования, что, при использовании ЭВМ, значительно упрощает расчеты.

2.7 Пример 2.5. Шестикратные интегралы в задаче о взаимном притяжении двух материальных тел

Хотя реальное физическое пространство, в котором мы живем, имеет только три измерения, существуют разнообразные конкретные задачи, в которых приходится рассматривать интегралы кратности большей трех. В качестве простейшего примера такого рода укажем формулу для силы взаимного притяжения двух материальных тел конечных размеров. Пусть одно из этих тел занимает некоторую область D и имеет объемную плотность $\rho(x, y, z)$, а другое занимает область D' и имеет объемную плотность $\rho'(x', y', z')$ (нам удобно обозначить декартовы координаты точек одного и другого тела разными символами). По закону Ньютона направленная по оси компонента dFx силы притяжения, действующей между двумя бесконечно малыми элементами

$$dv = dx dy dz \quad \text{и} \quad dv' = dx' dy' dz'$$

объемов этих двух тел, равна

$$G \frac{\rho(x, y, z) \rho'(x', y', z')}{r^3} (x - x') dx dy dz dx' dy' dz', \quad (2.6)$$

где G – гравитационная постоянная и

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

Для того чтобы получить полную величину компоненты F_x силы взаимодействия между рассматриваемыми телами, нужно просуммировать выражения (2.6) по всем элементам объема обоих тел. Иначе говоря, компонента F_x силы взаимного притяжения тел, заполняющих области D и D' , равна

$$F_x = G \iiint_{D \times D'} \iiint \frac{\rho(x, y, z) \rho'(x', y', z')}{r^3} (x - x') dx dy dz dx' dy' dz'. \quad (2.7)$$

При этом точка (x, y, z) пробегает всю область D , а точка (x', y', z') независимо пробегает всю область D' . Таким образом, интеграл (2.7) берется по области в шестимерном пространстве, которую естественно обозначить $D \times D'$ и назвать «произведением» областей D и D' . Аналогично записываются и две остальные компоненты:

$$F_y = G \iiint_{D \times D'} \iiint \frac{\rho(x, y, z) \rho'(x', y', z')}{r^3} (y - y') dx dy dz dx' dy' dz', \quad (2.8)$$

$$F_z = G \iiint_{D \times D'} \frac{\rho(x, y, z) \rho'(x', y', z')}{r^3} (z - z') dx dy dz dx' dy' dz'. \quad (2.9)$$

Тогда абсолютное значение силы притяжения будет равно

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}. \quad (2.10)$$

Воспользуемся методом Монте-Карло для расчета 6-кратных интегралов (2.7), (2.8), (2.9), а затем по формуле (2.10) рассчитаем абсолютное значение силы притяжения. Используем данную модель для вычисления силы взаимного притяжения Луны и Земли. Для простоты предположим, что плотности Земли и Луны не зависят от координат и возьмем их средние значения. Для проведения численного эксперимента нам понадобятся следующие физические величины:

$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$ – гравитационная постоянная;

$m_1 = 6 \cdot 10^{24} \text{кг}$ – масса Земли;

$m_2 = 7.35 \cdot 10^{22} \text{кг}$ – масса Луны;

$r = 384467000 \text{м}$ – расстояние между Луной и Землей;

$\rho_1 = 5520 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ – средняя плотность Земли;

$\rho_2 = 3346 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ – средняя плотность Луны;

$R_1 = 6367000 \text{м}$ – радиус Земли;

$R_2 = 1737000 \text{м}$ – радиус Луны.

Поскольку размеры тел малы по сравнению с расстоянием между ними, то объекты можно рассматривать как точечные и вычислить их силу притяжения по формуле:

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}, \quad (2.11)$$

где m_1 и m_2 массы точечных объектов. Это значение будем использовать для сравнения с результатами вычислений с помощью метода Монте-Карло. По формуле (2.11), находим значение силы

$$F = 1.98997 \cdot 10^{20} \text{Н}.$$

Результаты вычислений этой силы с помощью метода Монте-Карло приведем в следующей таблице.

N	\tilde{I}	Δ
10^5	$1.98226 \cdot 10^{20}$	$0.11 \cdot 10^{20}$
10^7	$1.98148 \cdot 10^{20}$	$0.0099 \cdot 10^{20}$

Очевидно, что при увеличении количества испытаний в 100 раз, погрешность уменьшилась в 10 раз.

Задача интересна тем, что если тела нельзя считать точечными, то вместо формулы (2.11) нужно вычислять значение силы, пользуясь формулами (2.7), (2.8), (2.9),(2.10), которые дают более точный результат. Также аналитические расчеты сильно усложнились бы, если бы плотности тел зависели от координат. Метод Монте-Карло позволяет значительно упростить задачу. Аналогичные интегралы возникают в задаче о притяжении двух заряженных тел.

Заключение

В работе были изучены особенности применения метода Монте-Карло в решении задач численного интегрирования. Для знакомства с теоретическими основами метода было проанализировано 11 источников.

Для более глубокого понимания метода Монте-Карло приведены необходимые сведения из теории вероятностей и математической статистики, рассмотрены методы получения случайных чисел, сформулированы идея метода и оценка погрешности метода.

Разобраны различные способы вычисления одномерных интегралов, приведен наиболее типичный способ вычисления многомерных интегралов.

В процессе работы возникла необходимость оценки погрешности вычисления кратных интегралов. Для оценки этой погрешности получена формула и в качестве ее следствия – формула для оценки количества испытаний для достижения указанной точности.

Сформулирован подробный алгоритм для вычисления интегралов методом Монте-Карло, рассмотрены примеры, демонстрирующие особенности применения метода.

На основе изученного материала был создан электронный информационный ресурс на тему «Численное интегрирование с использованием метода Монте-Карло».

Для проведения численного эксперимента в среде MATLAB написана модифицируемая программа для вычисления интегралов. Проведенные численные эксперименты указывают на работоспособность полученных оценок.

Созданный информационный ресурс может быть использован в учебном процессе в качестве дополнительного материала в курсе Численные методы или дисциплин специализации.

Литература

- [1] Бермант А.Ф., Арманович И.Г. Краткий курс математического анализа для втузов. - М., 1967г. 736 стр. с илл.
- [2] Будаг Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. - М.:Наука, 1965г. 608 стр. с илл.
- [3] Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. - М.:Наука, 1973г. 312 стр. с илл.
- [4] Соболев И.М. Метод Монте-Карло (Популярные лекции по математике, вып. 46). - М.:Наука, 1968г. 64 стр.
- [5] Шеннон Р. Имитационное моделирование систем - искусство и наука. - М.:Мир, 1978г.
- [6] Брусленко М.П., Шрейдер Ю.А. Метод статистических испытаний (Монте-Карло) и его реализация на цифровых вычислительных машинах. - М.: ФИЗМАТГИЗ, 1961г.
- [7] Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. - М.:Наука, 1975г. 472 стр. с илл.
- [8] Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учебное пособие для студентов ВТУЗов. - 3-е изд., перераб. и доп. - М.:Высш.школа, 1979г. 400 стр. с илл.
- [9] Reuven Y. Rubinstein, Dirk P. Kroese. Simulation and monte carlo method. - 2nd ed. Published by John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey. Published simultaneously in Canada.
- [10] Кетков Ю.Л., Кетков А.Ю., Шульц М.М. MATLAB 7, программирование, численные методы. - СПб.:БХВ-Петербург, 2005г. 752 стр. с илл.
- [11] Зубова С.В. Приложения кратных интегралов. Учебно-методическое пособие для студентов. - Воронеж, 2006

Приложение 1. Таблица случайных цифр

10 09 73 25 33	76 52 01 35 86	34 67 35 48 76	80 95 90 91 17
37 54 20 48 05	64 89 47 42 96	24 80 52 40 37	20 63 61 04 02
08 42 26 89 53	19 64 50 93 03	23 20 90 25 60	15 95 33 47 64
99 01 90 25 29	09 37 67 07 15	38 31 13 11 65	88 67 67 43 97
12 80 79 99 70	80 15 73 61 47	64 03 23 66 53	98 95 11 68 77
66 06 57 47 17	34 07 27 68 50	36 69 73 61 70	65 81 33 98 85
31 06 01 08 05	45 57 18 24 06	35 30 34 26 14	86 79 90 74 39
85 26 97 76 02	02 05 16 56 92	68 66 57 48 18	73 05 38 52 47
63 57 33 21 35	05 32 54 70 48	90 55 35 75 48	28 46 82 87 09
73 79 64 57 53	03 52 96 47 78	35 80 83 42 82	60 93 52 03 44
98 52 01 77 67	14 90 56 86 07	22 10 94 05 58	60 97 09 34 33
11 80 50 54 31	39 80 82 77 32	50 72 56 82 48	29 40 52 42 01
83 45 29 96 34	06 28 89 80 83	13 74 67 00 78	18 47 54 06 10
88 68 54 02 00	86 50 75 84 01	36 76 66 79 51	90 36 47 64 93
99 59 46 73 48	87 51 76 49 69	91 82 60 89 28	93 78 56 13 68
65 48 11 76 74	17 46 85 09 50	58 04 77 69 74	73 03 95 71 86
80 12 43 56 35	17 72 70 80 15	45 31 82 23 74	21 11 57 82 53
74 35 09 98 17	77 40 27 72 14	43 23 60 02 10	45 52 16 42 37
69 91 62 68 03	66 25 22 91 48	36 93 68 72 03	76 62 11 39 90
09 89 32 05 05	14 22 56 85 14	46 42 75 67 88	96 29 77 88 22
91 49 91 45 23	68 47 92 76 86	46 16 28 35 54	94 75 08 99 23
80 33 69 45 98	26 94 03 68 58	70 29 73 41 35	53 14 03 33 40
44 10 48 19 49	85 15 74 79 54	32 97 92 65 75	57 60 04 08 81
12 55 07 37 42	11 10 00 20 40	12 86 07 46 97	96 64 48 94 39
63 60 64 93 29	16 50 53 44 84	40 21 95 25 63	43 65 17 70 82
61 19 69 04 46	26 45 74 77 74	51 92 43 37 29	65 39 45 95 93
15 47 44 52 66	95 27 07 99 53	59 36 78 38 48	82 39 61 01 18
94 55 72 85 73	67 89 75 43 87	54 62 24 44 31	91 19 04 25 92
42 48 11 62 13	97 34 40 87 21	16 86 84 87 67	03 07 11 20 59
23 52 37 83 17	73 20 88 98 37	68 93 59 14 16	26 25 22 96 63
04 49 35 24 94	75 24 63 38 24	45 86 25 10 25	61 96 27 93 35
00 54 99 76 54	64 05 18 81 59	96 11 96 38 96	54 69 28 23 91
35 96 31 53 07	26 89 80 93 54	33 35 13 54 62	77 97 45 00 24
59 80 80 83 91	45 42 72 68 42	83 60 94 97 00	13 02 12 48 92
46 05 88 52 36	01 39 09 22 86	77 28 14 40 77	93 91 08 36 47
32 17 90 05 97	87 37 92 52 41	05 56 70 70 07	86 74 31 71 57
69 23 46 14 06	20 11 74 52 04	15 95 66 00 00	18 74 39 24 23
19 56 54 14 30	01 75 87 53 79	40 41 92 15 85	66 67 43 68 06
45 15 51 49 38	19 47 60 72 46	43 66 79 45 43	59 04 79 00 33
94 86 43 19 94	36 16 81 08 51	34 88 88 15 53	01 54 03 54 56
98 08 62 48 26	45 24 02 84 04	44 99 90 88 96	39 09 47 34 07
33 18 51 62 32	41 94 15 09 49	89 43 54 85 81	88 69 54 19 94
80 95 10 04 06	96 38 27 07 74	20 15 12 33 87	25 01 62 52 98
79 75 24 91 40	71 96 12 82 96	69 86 10 25 91	74 85 22 05 39
18 63 33 25 37	98 14 50 65 71	31 01 02 46 74	05 45 56 14 27
74 02 94 39 02	77 55 73 22 70	97 79 01 71 19	52 52 75 80 21
54 17 84 56 11	80 99 33 71 43	05 33 51 29 69	56 12 71 92 55
11 66 44 98 83	52 07 98 48 27	59 38 17 15 39	09 97 33 34 40
48 32 47 79 28	31 24 96 47 10	02 29 53 68 70	32 30 75 75 46
69 07 49 41 38	87 63 79 19 76	35 58 40 44 01	10 51 82 16 15

Приложение 2. Таблица значений функции $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3888
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

Приложение 3. Код основной программы Файл Dannie.m

```
function [I,MF,Omega,S1,S2,n,V, tB]=Dannie(N)
sumF=0;
sumDf=0;
n=0;
%-----
%Параметр tB, соответствующий коэффициенту доверия B
    tB=3;
%-----

%-----
%Параллелепипед, ограничивающий область интегрирования:

    %вектор начал сторон параллелепипеда
        a=[0,0];
    %вектор концов сторон параллелепипеда
        b=[2,4];
%-----
V=1;
m=numel(a);
for i=1:m
    V=V*(b(i)-a(i));
end

for j=1:N
    x=a+(b-a).*rand(size(a));
%-----
    %Область интегрирования:

        if (0<=x(1))&&(x(1)<=2)&&(x(1)^2<=x(2))&&(x(2)<=2*x(1))
%-----

            n=n+1;
```

```

%-----
      %Подынтегральная функция:
fx=x(1)+x(2);
%-----

      sumF=sumF+fx;
      sumDf=sumDf+fx^2;
    end
end
MF=sumF/n;
I=V*sumF/N;
Df=sumDf/n-(sumF/n)^2;
S1=sqrt(Df);
Omega=n/N;
S2=sqrt(Omega*(1-Omega));

```

Файл Integrirovanie.m

```

rand('state',sum(100*clock));
N=input('Введите N=');
[I,MF,Omega,S1,S2,n,V, tB]=Dannie(N);
c=V*tB*(sqrt(Omega)*S1+MF*S2);
E=c/sqrt(N);

disp('Значение интеграла I=')
disp(I)
disp('Погрешность интегрирования E=')
disp(E)

E1=input('Введите желаемую точность, E=');

N1=ceil((V*tB*(S1*sqrt(Omega)+S2*MF)/E1)^2);
disp('N1=')
disp(N1)
[I1,MF1,Omega1,S3,S4,n1,V1, tB]=Dannie(N1);
c1=V1*tB*(sqrt(Omega1)*S3+MF1*S4);

```

```
E2=c1/sqrt(N1);  
disp('Значение интеграла I=')  
disp(I1)  
disp('Погрешность интегрирования E=')  
disp(E2)
```

Приложение 4. Код модифицированной программы Файл IntegrirovanieModif.m

```
rand('state',sum(100*clock));
q=1000;
for k=0:4
    [I,MF,Omega,S1,S2,n,V,tB]=Dannie(q*10^k);
    c=V*tB*(sqrt(Omega)*S1+MF*S2);
    E=c/sqrt(q*10^k);
    disp('При количестве испытаний N=')
    disp(q*10^k)
    disp('Значение интеграла I=')
    disp(I)
    disp('Погрешность E=')
    disp(E)
    disp('Среднее значение функции равно MF=')
    disp(MF)
    disp('Объем области интегрирования Omega=')
    disp(Omega)
    disp('Ошибка вычисления MF DeltaF=')
    disp(tB*S1/sqrt(n))
    disp('Ошибка вычисления Omega DeltaOmega=')
    disp(tB*S2/sqrt(q*10^k))
    disp('Величина c=')
    disp(c)
    disp('-----')
```

end